



UNITÉ DE RECHERCHE  
INRIA-ROCQUENCOURT

Institut National  
de Recherche  
en Informatique  
et en Automatique

Domaine de Voluceau  
Rocquencourt  
BP 105  
78153 Le Chesnay Cedex  
France  
Tél. (1) 39 63 55 11

# Rapports de Recherche

N° 1214

*Programme 7*  
*Calcul Scientifique,*  
*Logiciels Numériques et Ingénierie Assistée*

## **DIFFRACTION ET DIFFERENCES FINIES. CAS DE LA FISSURE DROITE SEMI-INFINIE.**

**Francis COLLINO**  
**Patrick JOLY**

**Avril 1990.**



★ R R - 1 2 1 4 ★



**DIFFRACTION ET DIFFERENCES FINIES.  
CAS DE LA FISSURE DROITE SEMI-INFINIE.**

**DIFFRACTION AND FINITE DIFFERENCES.  
THE SEMI-INFINITE PLANE STRAIGHT CRACK.**

**Francis COLLINO**

**I.F.P.**

**1,4 Avenue de Bois Préau  
92500 Rueil-Malmaison**

**Patrick JOLY**

**I.N.R.I.A.**

**Domaine de Voluceau - Rocquencourt  
BP 105  
78153 Le Chesnay Cédex  
FRANCE**

## Résumé

La technique de Wiener-Hopf permet de résoudre le problème de la diffraction d'une onde harmonique par une fissure rectiligne semi-infinie. On approche ce problème par des schémas numériques d'ordre 2, puis on calcule les solutions correspondantes par une technique similaire.

On tire des conclusions en comparant les deux solutions. On met en évidence la perte d'un ordre de l'approximation. On insiste particulièrement sur le comportement du champ numérique aux points éloignés de la pointe de la fissure.

## Abstract

The Wiener-Hopf technique allows the calculation of the diffraction of an harmonic wave by a semi-infinite plane crack. This problem is approximated by a family of second order numerical schemes and the associated solutions are calculated by a similar technique.

We draw conclusions by comparing the two solutions. We point out the one order lost in the approximation. We especially emphasize the behavior of the numerical wave field at points far away from the point of the crack.

## Mots Clés

Diffraction, Schémas numériques, Fissure, Wiener-Hopf, Dispersion, Anisotropie.

## Keywords

Diffraction, Numerical scheme, Crack, Wiener-Hopf, Dispersion, Anisotropy.

## **CHAPITRE 0**

### **INTRODUCTION**

- Présentation du problème**
- Description des résultats**
- Plan de l'exposé**

## Introduction

Nous nous proposons d'étudier dans ce travail l'approximation par une famille de schémas numériques aux différences finies de la diffraction d'une onde acoustique par une fissure plane semi-infinie. Dans ce paragraphe, qui se veut «self-contained», le lecteur est censé trouver la substance de ce qui suivra. Notre but est de présenter de façon schématique les résultats obtenus et de décrire brièvement, en insistant davantage sur les idées que sur la rigueur du raisonnement, les techniques mises en œuvre pour l'obtention de ces résultats. Nous commençons par traiter le problème continu pour lequel la solution du problème de diffraction est bien connue. Nous posons tout d'abord le problème de façon précise et donnons les principales étapes du calcul menant à l'expression de la solution exacte dont nous analysons sommairement la structure. Puis nous présentons très succinctement les schémas numériques étudiés avant de décrire ce qui constitue la partie véritablement originale de notre travail, à savoir les résultats pour la solution numérique.

### 0.1. L'EQUATION D'HELMHOLTZ DANS LE PLAN FISSURE

Le modèle physique auquel nous nous intéressons est le suivant : nous considérons la propagation d'une onde harmonique de pulsation  $\omega$  dans un milieu bidimensionnel homogène constitué par le demi-espace  $\mathbb{R}^2$  privé d'une demi-droite  $(\Gamma)$  qui matérialise la fissure. Pour fixer les idées et les notations, nous poserons :

- $(\Gamma) = \{(x,0), x \geq 0\}$  : fissure semi-infinie
- $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus (\Gamma)$  : domaine de propagation

Sans restreindre la généralité du problème, on pourra supposer que la vitesse de propagation du milieu est égale à 1. L'équation qui régit la propagation d'une onde harmonique de pulsation  $\omega$  (i.e. de la forme  $u(x,y)e^{-i\omega t}$ ) dans le domaine  $\Omega$  est l'équation d'Helmholtz :

$$(0.1) \quad \Delta u + \omega^2 u = 0 \quad (x,y) \in \Omega$$

Il convient alors de préciser la condition aux limites sur la frontière  $\partial\Omega$  de  $(\Omega)$ . Nous choisissons ici la condition de Neumann :

$$(0.2) \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } (\partial\Omega)$$

Physiquement, si  $u$  représente la pression dans un fluide qui occuperait le domaine  $\Omega$ , la condition (0.2) traduit une condition de bord rigide (vitesse normale nulle à la paroi). Si  $u$  représente la composante orthogonale au plan  $(x,y)$  du vecteur déplacement d'une particule (propagation d'une onde SH dans un milieu élastique occupant le domaine  $\Omega$ ), cette même condition traduit la condition de surface libre (contrainte normale nulle le long de la fissure). Nous renvoyons le lecteur aux références [Ac], [Gra] ou [Ni] pour de plus amples informations sur la signification physique des équations (0.1) et (0.2).

Notons tout de suite que, comme l'ouvert  $\Omega$  n'est pas localement d'un seul côté de sa frontière (voir [Da]), il convient de donner un sens précis à la condition de Neumann (0.2).

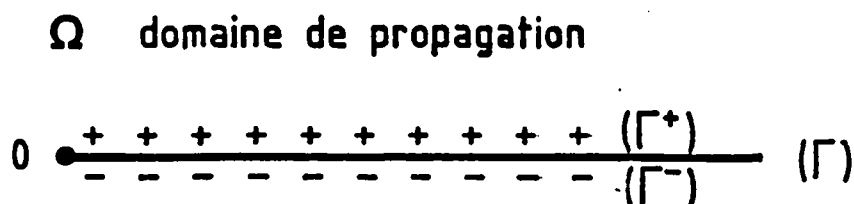
Pour cela, nous décomposons la frontière de  $\partial\Omega$  en :

$$(\partial\Omega) = (\Gamma^+) \cup (\Gamma^-)$$

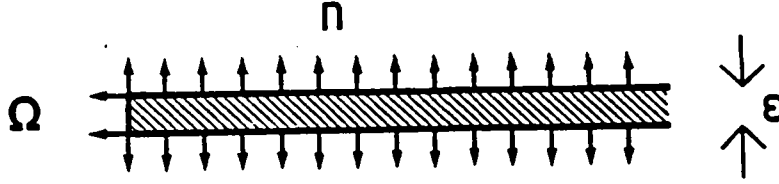
En tant que variétés non orientées,  $(\Gamma^+)$  et  $(\Gamma^-)$  sont confondues avec la demi droite  $(\Gamma)$ . En fait,  $(\Gamma^+)$  et  $(\Gamma^-)$  ne diffèrent que par la définition du vecteur unitaire normal «rentrant» par rapport à  $\Omega$ , soit  $n$ , qui est défini par :

$$(0.3) \quad \begin{cases} n = (0,1) & \text{sur } (\Gamma^+) \\ n = (0,-1) & \text{sur } (\Gamma^-) \end{cases}$$

Nous dirons que  $(\Gamma^+)$  est la lèvre inférieure de la fissure  $(\Gamma)$  et que  $(\Gamma^-)$  en est la lèvre supérieure, ce que nous pouvons symboliser par le dessin suivant :



Physiquement, la situation que nous considérons peut être vue comme le cas limite d'une fissure semi-infinie d'épaisseur  $\varepsilon$ , lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ .



Soit alors  $u$  une fonction régulière définie sur l'ouvert  $\Omega$ , on peut alors définir

$\frac{\partial u}{\partial n} |_{\partial \Omega}$  comme suit :

$$(0.4) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial n} |_{\Gamma^+} = \frac{\partial u^+}{\partial y} & \text{sur } \Gamma^+ \\ \frac{\partial u}{\partial n} |_{\Gamma^-} = \frac{\partial u^-}{\partial y} & \text{sur } \Gamma^- \end{cases}$$

où les fonction  $\frac{\partial u^+}{\partial y}$  et  $\frac{\partial u^-}{\partial y}$  sont définies par les limites suivantes (si elles existent) :

$$(0.5) \quad \begin{cases} \frac{\partial u^+}{\partial y}(x,0) = \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y > 0}} \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) & \forall x > 0 \\ \frac{\partial u^-}{\partial y}(x,0) = \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y < 0}} \frac{\partial u}{\partial y} & \forall x > 0 \end{cases}$$

Bien entendu,  $\frac{\partial u^+}{\partial y}$  et  $\frac{\partial u^-}{\partial y}$  diffèrent en général et la condition de Neumann (0.2) équivaut à :

$$(0.6) \quad \begin{cases} \frac{\partial u^+}{\partial y}(x,0) = 0 & x > 0 \\ \frac{\partial u^-}{\partial y}(x,0) = 0 & x > 0 \end{cases}$$



De la même façon que l'on définit  $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega}$  on peut définir la trace de  $u$ , soit  $u/\partial\Omega$  par :

$$(0.7) \quad \begin{cases} u/\Gamma^+ = u^+ & \text{sur } \Gamma^+ \\ u/\Gamma^- = u^- & \text{sur } \Gamma^- \end{cases}$$

avec, par définition :

$$(0.8) \quad \begin{cases} u^+(x,0) = \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y > 0}} u(x,y) & \forall x > 0 \\ u^-(x,0) = \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y < 0}} u(x,y) & \forall x > 0 \end{cases}$$

Les solutions de (0.1), (0.2) seront en général telles que :

$$u^+ \neq u^-$$

Autrement dit, la fonction  $u$  présentera un saut le long de la fissure ( $\Gamma$ ), soit :

$$(0.9) \quad \varphi = [u] = u^+ - u^- \quad \text{sur } (\Gamma)$$

Il est du reste classique de ramener la résolution des équations (0.1) et (0.2) à la résolution d'une équation intégrale sur  $\Gamma$  dont l'inconnue est le saut de discontinuité  $\varphi$ . (voir [Da], [Ne]). Cette approche est surtout intéressante lorsque l'on considère des fissures «finies» de géométrie quelconque. Le cas qui nous intéresse, la fissure plane semi-infinie, est l'un des rares pour lesquels on dispose d'une solution analytique grâce à la méthode de Wiener Hopf, qui sera décrite au chapitre 1.

## 0.2. LE PROBLEME DE DIFFRACTION

Le problème précis que nous considérons est un problème de diffraction, c'est-à-dire la recherche de solutions particulières de (0.1) et (0.2) sous la forme :

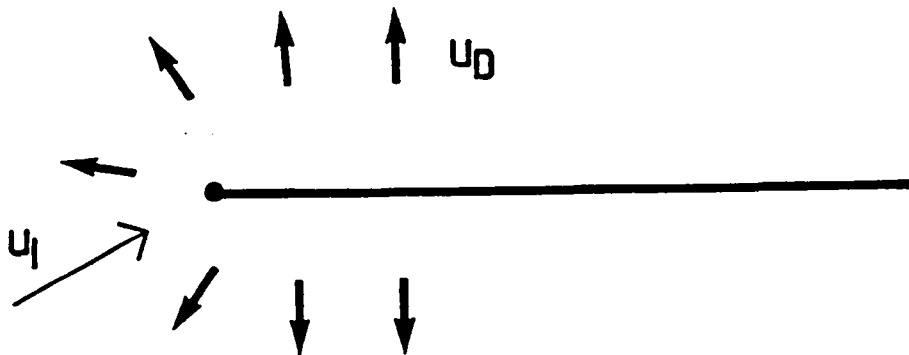
$$(0.10) \quad u = u_T = u_I + u_D$$

où, par définition :

- $u_T$  est le champ total,
- $u_I$  est le champ incident qui est la donnée du problème. Il s'agit d'une solution (régulière) de l'équation d'Helmoltz dans le domaine sans fissure.

$$(0.11) \quad \Delta u_I + \omega^2 u_I = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^2$$

- $u_D$  est le champ diffracté. C'est l'inconnue du problème. Elle traduit l'effet de la fissure sur le champ incident  $u_I$ .



Le cas le plus intéressant, tant sur le plan pratique que théorique, est celui où  $u_I$  est une onde plane harmonique incidente :

$$(0.12) \quad u_I = \exp i\omega (x \cos \theta + y \sin \theta)$$

Par linéarité des équations, il est facile de voir que  $u_D$  est solution d'une équation d'Helmoltz avec donnée de Neumann non homogène :

$$(0.13) \quad \begin{cases} \Delta u_D + \omega^2 u_D = 0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u_D}{\partial n} |_{\partial\Omega} = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où la fonction  $g$  est définie par :

$$(0.14) \quad \begin{cases} g/\Gamma^+ = g^+ = \frac{\partial u_I}{\partial y} |_{\Gamma} \\ g/\Gamma^- = g^- = -\frac{\partial u_I}{\partial y} |_{\Gamma} \end{cases}$$

Pour garantir l'unicité (dans un cadre fonctionnel raisonnable) du champ diffracté, il est bien connu (voir [Ei], [Gru]) qu'il faut adjoindre aux équations «locales» du problème (0.13), une condition de comportement à l'infini. La condition physiquement acceptable est la condition de radiation sortante :

$$(0.15) \quad \frac{\partial u_D}{\partial r} + i\omega u_D = o\left(\frac{1}{r}\right) \quad r \rightarrow +\infty$$

$r$  représentant la distance à l'extrémité de la fissure (qui coïncide avec l'origine).

Mathématiquement, il est important de savoir que la solution sortante définie par (0.13) et (0.15) peut être également définie à l'aide du principe d'absorption limite ([Wi], [Ei]). De façon plus précise,  $u_D$  n'est autre que la limite, lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0 par valeurs positives, de  $u_D^\varepsilon$ , unique solution de carré sommable (i.e.  $L^2(\Omega)$ ) du problème

$$(0.16) \quad \begin{cases} \Delta u_D^\varepsilon + i\varepsilon\omega u_D^\varepsilon + \omega^2 u_D^\varepsilon = 0 \\ \frac{\partial u_D^\varepsilon}{\partial n} |_{\partial\Omega} = -g \end{cases}$$

Le paramètre  $\varepsilon > 0$  représente un terme d'absorption. (0.16) correspond en effet à l'équation des ondes avec amortissement :

$$(0.17) \quad \frac{\partial^2 u_D^\varepsilon}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial u_D^\varepsilon}{\partial t} - \Delta u_D^\varepsilon = 0$$

Cette dernière caractérisation de la solution sortante  $u_D$  sera particulièrement importante pour traiter le cas discret pour lequel on ne dispose pas a priori de condition de radiation.

On peut donc résoudre (0.13), (0.15) en procédant en deux étapes :

- on calcule la solution amortie  $u_D^\varepsilon$  de (0.16),
- on passe à la limite lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

C'est cette même démarche qui sera suivie scrupuleusement pour le traitement de solutions numériques.

Notons que c'est le calcul de  $u_D^\varepsilon$  qui fait appel à la technique de Wiener-Hopf. Pour cela, on commence par remarquer que compte tenu de la condition  $g^+ = -g^-$  (voir (0.14)), la fonction  $(x,y) \rightarrow u_D^\varepsilon(x,y)$  est impaire par rapport à la variable transverse  $y$ . On peut donc alors se ramener à la détermination de la seule restriction de  $u_D^\varepsilon$  au demi-espace

$$R^2_+ = \{ (x,y) \in R^2 / y > 0 \}$$

qui est solution d'une équation d'Helmoltz avec condition aux limites de type mixte :

$$(0.18) \quad \begin{cases} + \Delta u_D^\varepsilon + i\varepsilon\omega u_D^\varepsilon + \omega^2 u_D^\varepsilon = 0 & \text{dans } R^2_+ \\ u_D^\varepsilon(x,0) = 0 & x < 0 \\ \frac{\partial u_D^\varepsilon}{\partial y}(x,0) = 0 & x > 0 \end{cases}$$

La géométrie du problème suggère alors de faire appel à la transformation de Fourier partielle dans la direction  $x$

$$u_D^\varepsilon(x,y) \longrightarrow \hat{u}_D^\varepsilon(k,y) \quad k \in \mathbb{R}$$

La résolution de l'équation d'Helmholtz mène alors aisément à l'expression :

$$(0.19) \quad \begin{cases} \hat{u}_D^\varepsilon(k,y) = A(k) \exp - (\omega^2 - k^2 + i\varepsilon\omega)^{1/2} y & y > 0 \\ \operatorname{Re}(\omega^2 - k^2 + i\varepsilon\omega)^{1/2} > 0 \end{cases}$$

La détermination de  $A(k)$  se fait grâce aux conditions aux limites. L'exploitation de cette condition mène précisément à une équation de type Wiener-Hopf sur la fonction  $A(k)$ . Nous reviendrons au paragraphe 1.0 sur cette équation et sa résolution. Signalons simplement que c'est à ce niveau que se situent à la fois la difficulté essentielle et le point-clé du calcul. La résolution de cette équation permet alors de déterminer  $A(k)$  et par suite  $u_D^\varepsilon$  par transformation de Fourier inverse. Il reste alors à passer à la limite lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0.

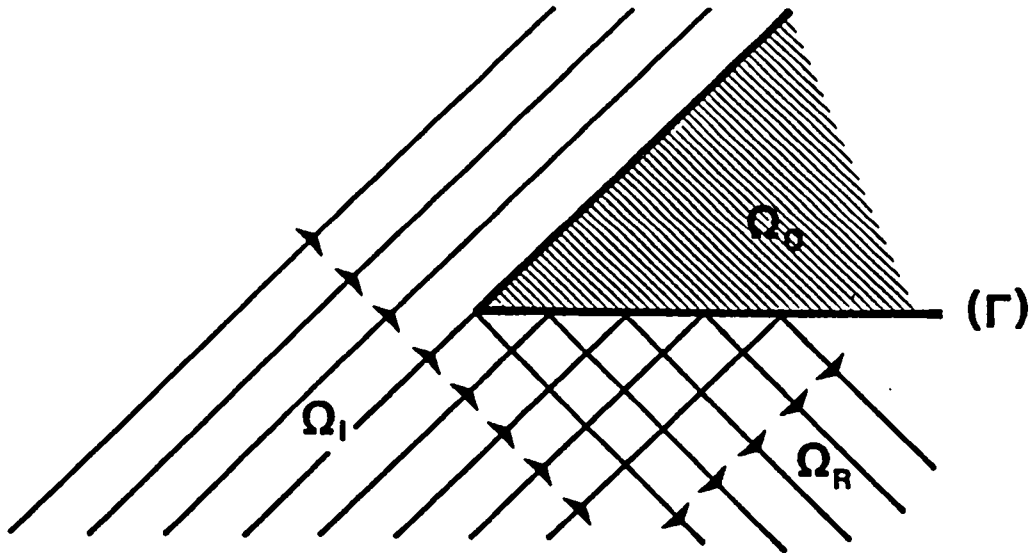
### 0.3. PROPRIETES ASYMPTOTIQUES DE LA SOLUTION CONTINUE

Le calcul complet a été mené lorsque l'onde incidente est l'onde plane (0.12). Il est détaillé dans [No] et nous présentons ici le résultat. Le champ complet  $u_T = u_I + u_D$  peut s'écrire sous la forme :

$$(0.20) \quad u = u_G + u^*$$

où  $u_G$  désigne le champ géométrique, dont la structure se détermine aisément à partir des lois de l'optique géométrique, et  $u^*$  le champ diffracté par l'extrémité de la fissure.

i) Expression du champ géométrique  $u_G$  :



Si  $(r, \Theta)$  désigne les coordonnées polaires associées à l'axe  $Ox$  et l'origine  $0$ , on partitionne  $\Omega$  en trois zones :

$$\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_k \cup \Omega_I$$

$$\Omega_0 = \{(r, \Theta) / 0 < \Theta < \theta\} \quad : \text{zone d'ombre}$$

$$\Omega_R = \{(r, \Theta) / -\theta < \Theta < 0\} \quad : \text{zone réfléchie}$$

$$\Omega_I = \{(r, \Theta) / \Theta \in [-\theta, \theta]\} \quad : \text{zone incidente}$$

Le champ géométrique  $u_G$  est alors donné par :

$$(0.21) \quad \begin{cases} u_G = u_I & \text{dans } \Omega_I \\ u_G = 0 & \text{dans } \Omega_0 \\ u_G = u_I + u_R & \text{dans } \Omega_R \end{cases}$$

où l'onde réfléchie  $u_R$  est bien entendu définie par :

$$(0.22) \quad u_R(x, y) = \exp i\omega(x \cos \theta - y \sin \theta)$$

l'onde incidente étant donnée par (0.12)

ii) Expression du champ diffracté  $u^*$

Elle fait appel à la fonction de Fresnel :

$$(0.23) \quad F(x) = e^{-ix^2} \int_x^{+\infty} e^{it^2} dt$$

qui est une fonction tabulée dont les propriétés sont bien connues (voir [Lu]).

En fait, c'est le champ total  $u_T$  qui s'exprime simplement à l'aide de  $F(x)$ . En coordonnées polaires  $(r, \Theta)$  cette expression s'écrit :

$$(0.24) \quad u_T(r, \Theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp i \left( \omega r - \frac{\pi}{4} \right) \left\{ F \left( \sin \left( \frac{\theta - \Theta}{2} \right) \sqrt{2\omega r} \right) + F \left( \sin \left( \frac{\theta + \Theta}{2} \right) \sqrt{2\omega r} \right) \right\}$$

Le champ  $u^*$  étant alors simplement défini par :

$$u^* = u_D - u_G$$

A ce niveau, la séparation champ géométrique-champ diffracté  $u^*$  apparaît totalement arbitraire. Elle se justifie lorsque l'on examine le comportement asymptotique à l'infini (c'est-à-dire, loin de l'extrémité de la fissure) des champs  $u_G$  et  $u^*$ .

En effet, contrairement au champ géométrique, le champ diffracté  $u^*$  décroît comme  $\frac{1}{\sqrt{r}}$ . De façon plus précise, on montre que :

$$(0.25) \quad \left| \begin{array}{l} u^*(r, \Theta) \sim A(\theta, \Theta) \frac{e^{i\omega r}}{\sqrt{\omega r}} \\ r \rightarrow +\infty \\ A(\theta, \Theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos\left(\frac{1}{2}\theta\right) \sin\left(\frac{1}{2}\Theta\right)}{\cos\theta - \cos\Theta} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \end{array} \right.$$

Autrement dit, l'onde diffractée  $u^*$  se comporte exactement comme une onde sphérique divergente émise par l'extrémité O de la fissure dont l'amplitude varie le long du front comme la fonction  $\Theta \rightarrow |A(\theta, \Theta)|$ . Les fronts d'onde asymptotiques associés à  $u^*$  sont donc des cercles centrés sur l'origine et le diagramme d'amplitude est la courbe (paramétrée par  $\theta$ ) d'équation polaire  $r = |A(\theta, \Theta)|$ .

Il est à remarquer que :

- le champ géométrique  $u_G$  et le champ diffracté  $u^*$  sont discontinus le long des demi-droites  $\Theta = \pm \theta$  (qui délimitent les zones d'ombre  $\Omega_O$  et réfléchie  $\Omega_R$ ) mais le champ total  $u_T$  est lui continu dans l'ouvert  $\Omega$ .
- l'amplitude  $A$  dépend de l'angle d'incidence  $\theta$ , de l'angle d'observation  $\Theta$  mais est indépendante de la pulsation  $\omega$  ; elle tend vers  $+\infty$  lorsque  $\Theta \rightarrow \pm \theta$ .

Nous illustrons maintenant le résultat (0.24) en représentant à l'aide des formules (0.24) et (0.23) :

- le champ total  $u_T$ ,
- le champ diffracté  $u^*$ ,

pour différentes valeurs de l'angle d'incidence  $\theta$ .

La représentation choisie est issue de la sismique : on considère, pour chaque  $x = j\Delta x$ , la fonction :

$$y \rightarrow u_T \quad \text{ou} \quad u^*(j\Delta x, y)$$

et on trace son graphe en «noircissant» les parties de la courbe dépassant un seuil, convenablement choisi, et en «blanchissant» les parties situées en deçà de l'opposé de ce seuil.

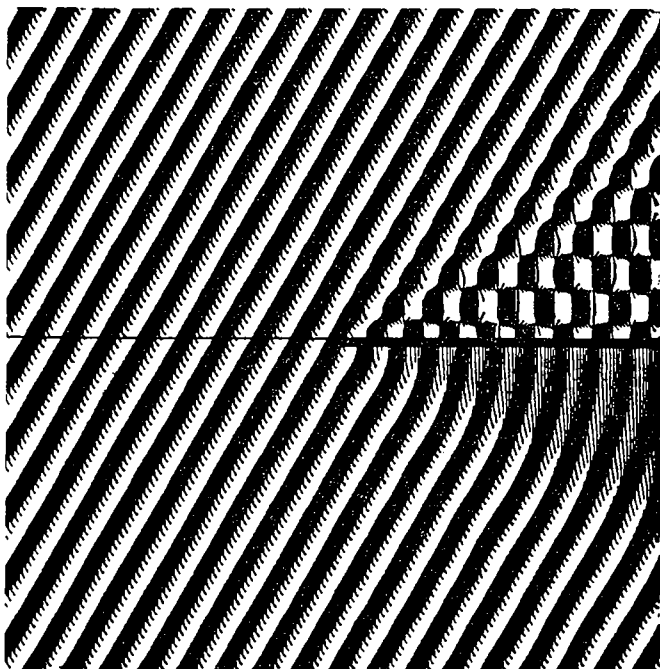
Ce genre de visualisation permet de mettre en relief les points qui vibrent en phase. Ce procédé est bien adapté à notre problème.



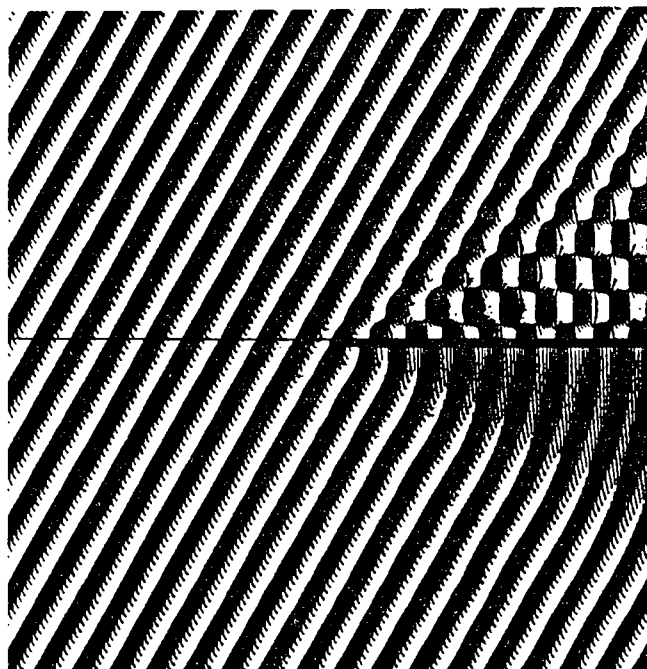
# INCIDENCE $-30^\circ$

## CHAMP TOTAL

Partie réelle

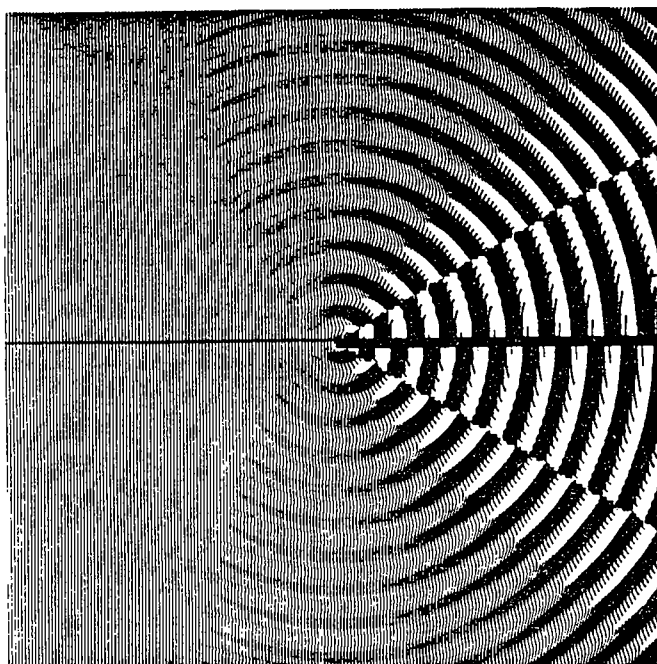


Partie imaginaire

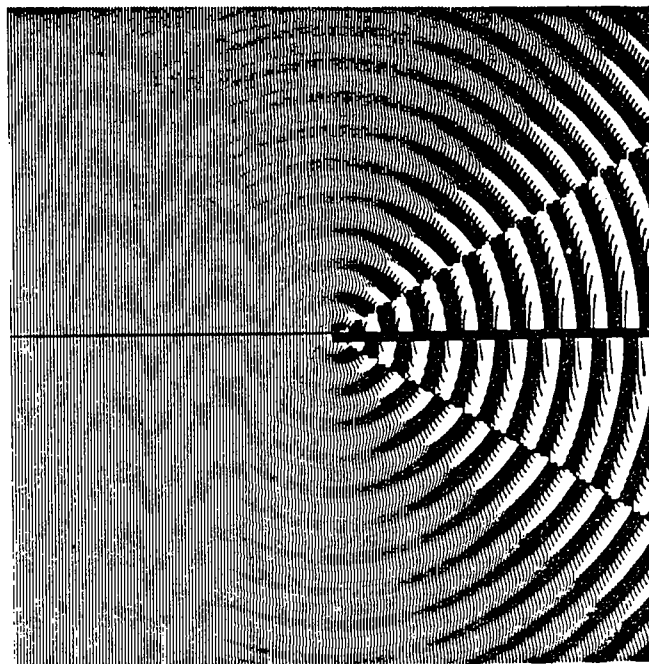


## CHAMP DIFFRACTÉ

Partie réelle



Partie imaginaire

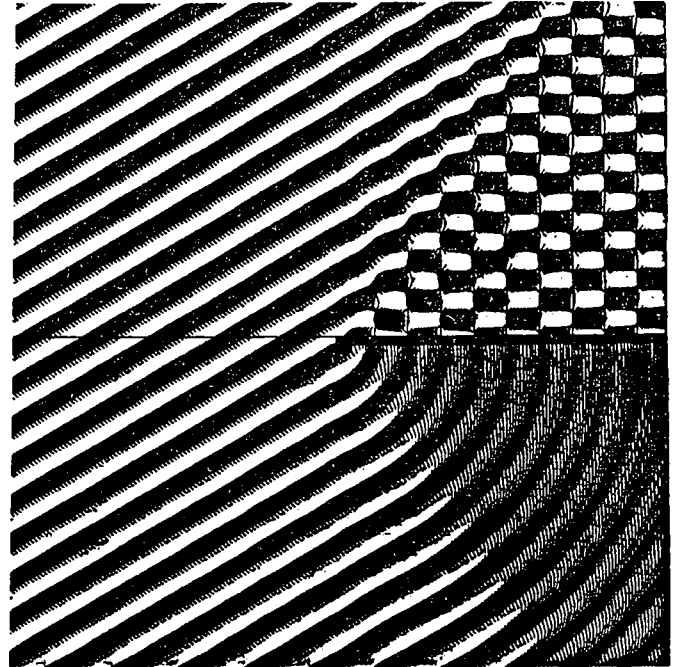
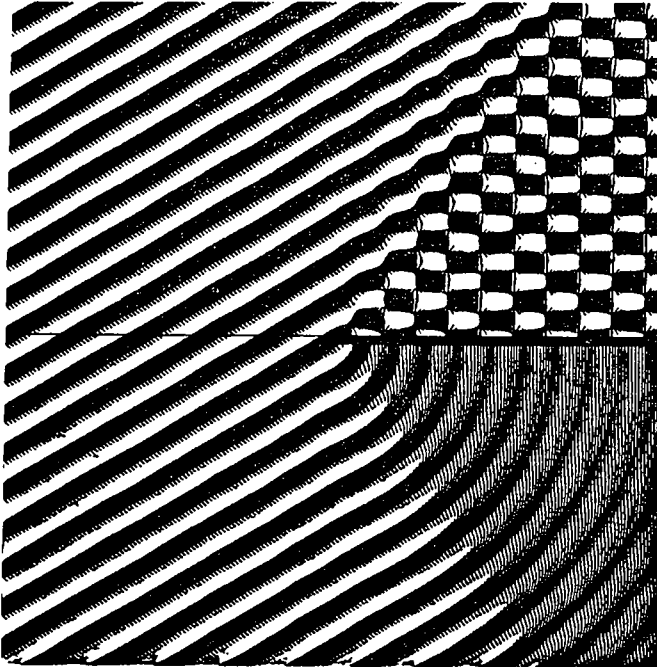


# INCIDENCE-60°

## CHAMP TOTAL

Partie réelle

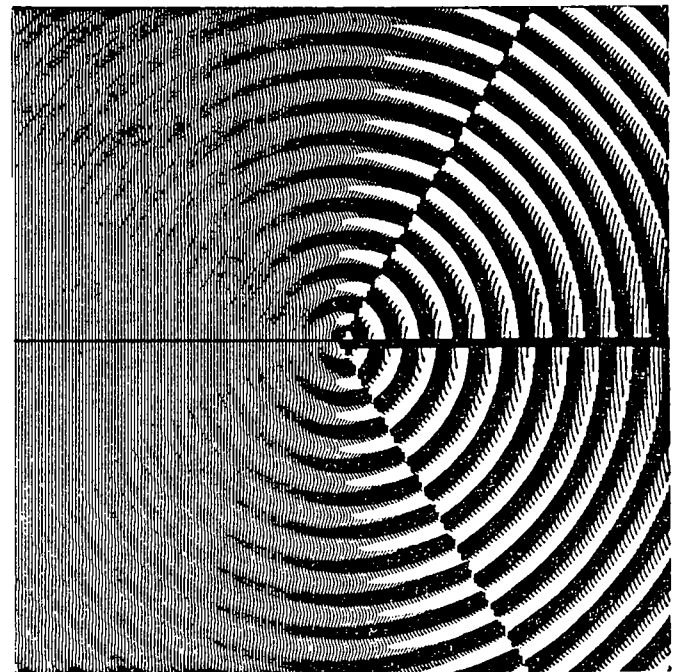
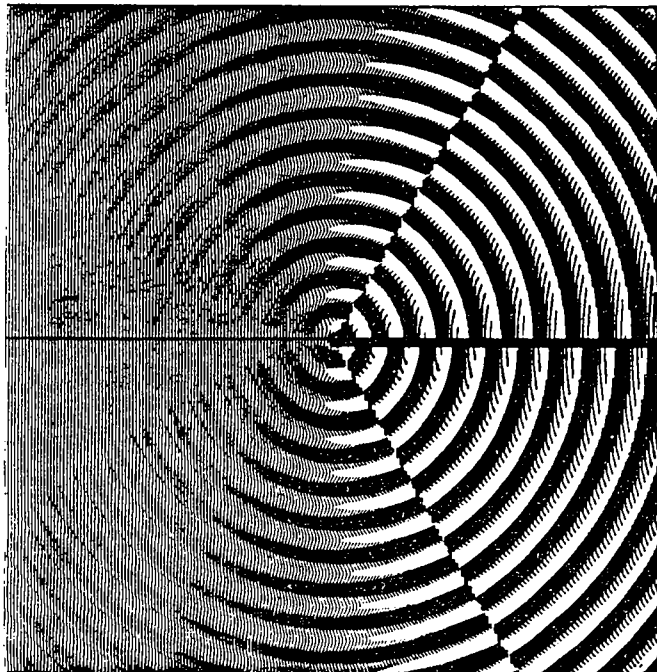
Partie imaginaire



## CHAMP DIFFRACTÉ

Partie réelle

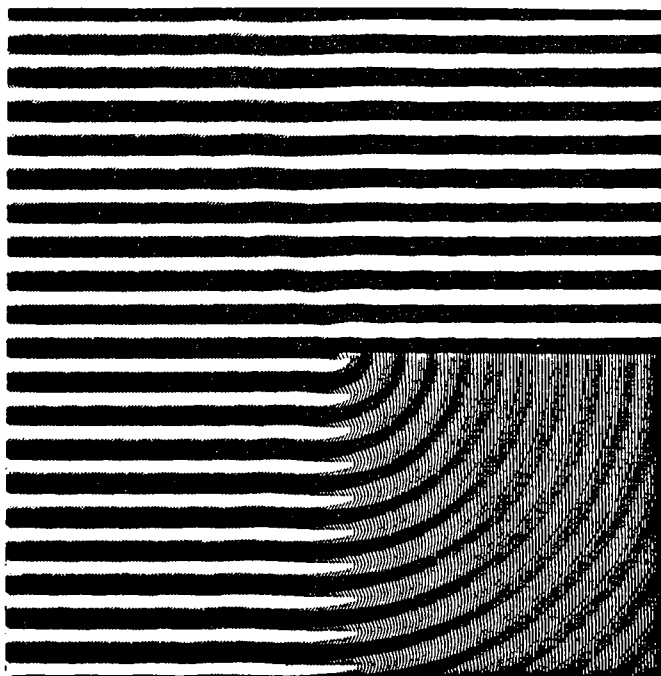
Partie imaginaire



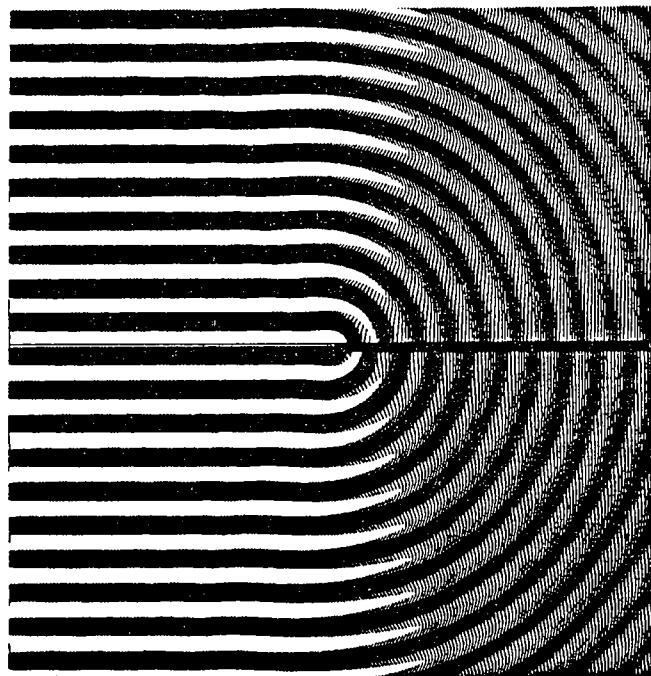
# INCIDENCE-90°

## CHAMP TOTAL

Partie réelle

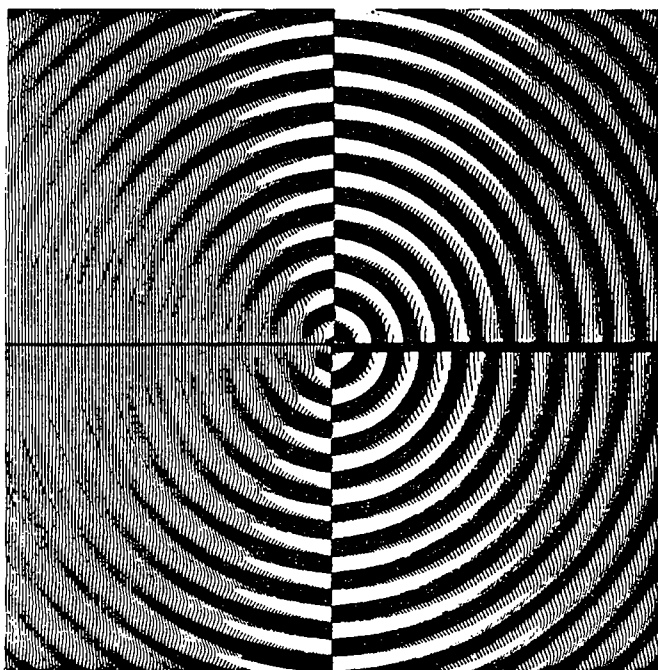


Partie imaginaire

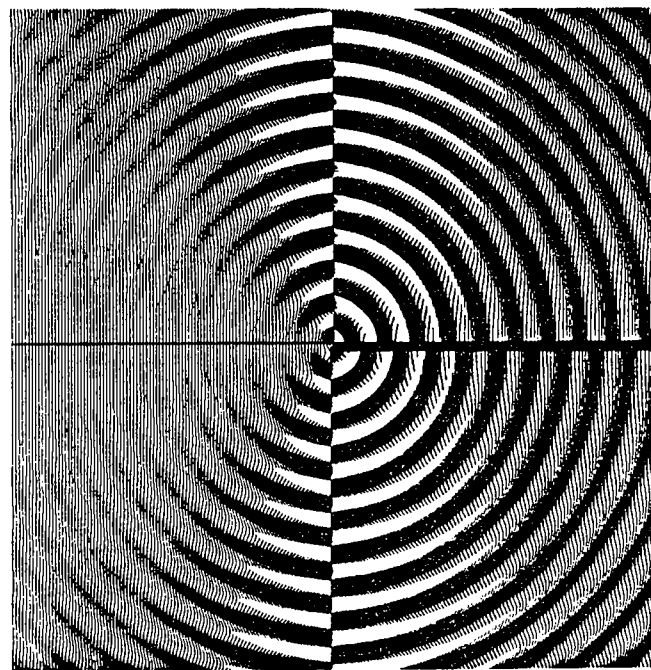


## CHAMP DIFFRACTÉ

Partie réelle



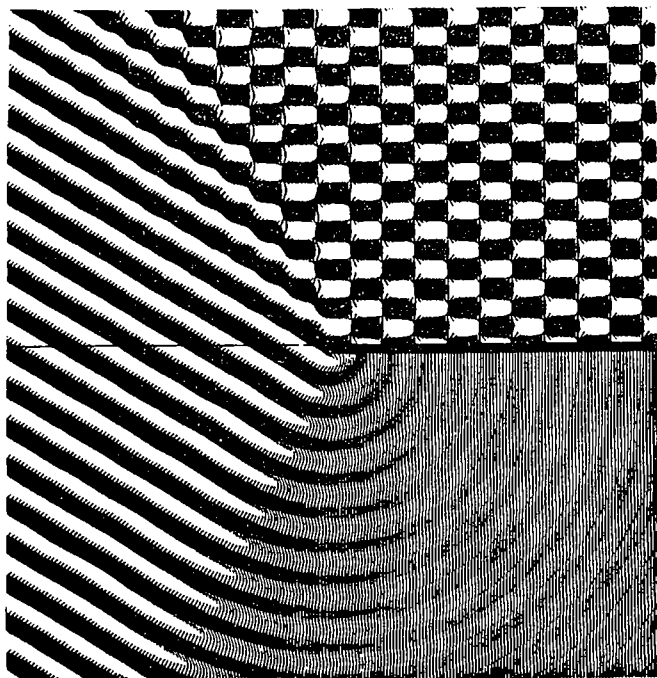
Partie imaginaire



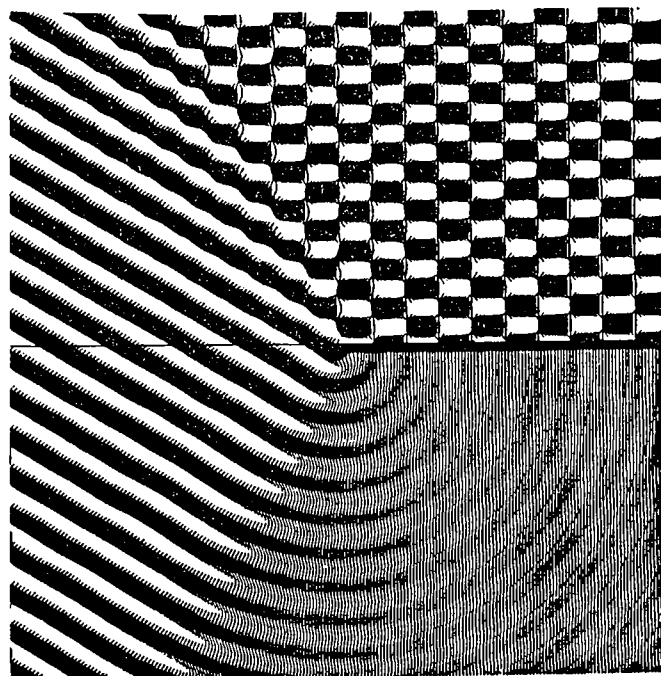
INCIDENCE  $-120^\circ$

CHAMP TOTAL

Partie réelle

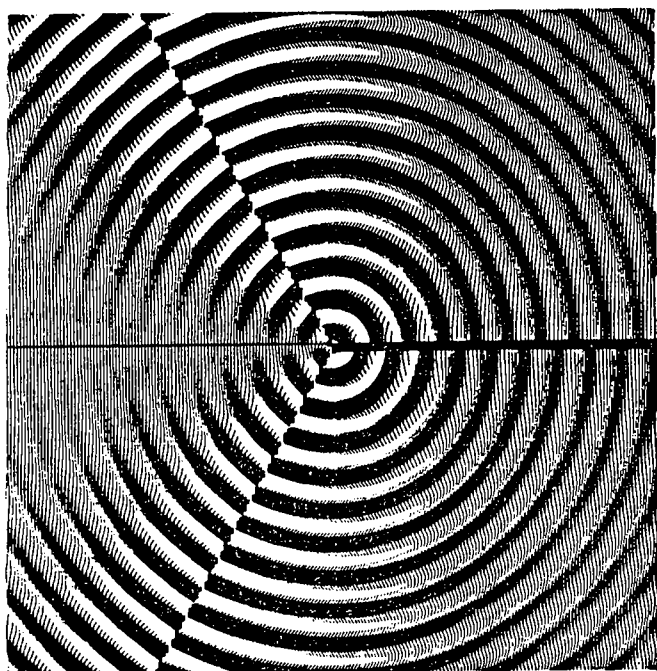


Partie imaginaire

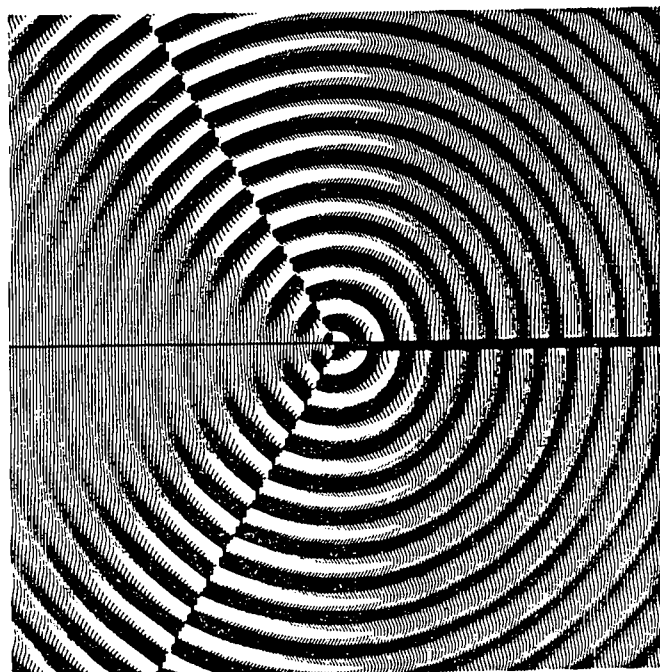


CHAMP DIFFRACTÉ

Partie réelle



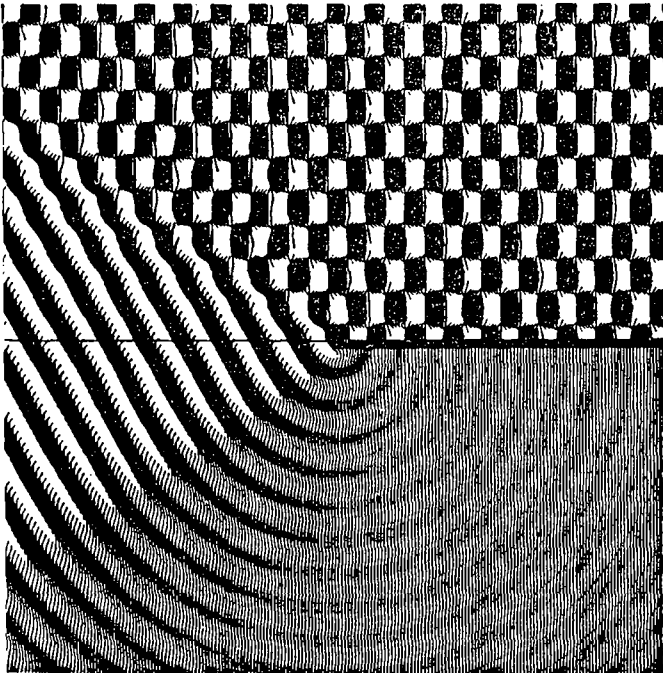
Partie imaginaire



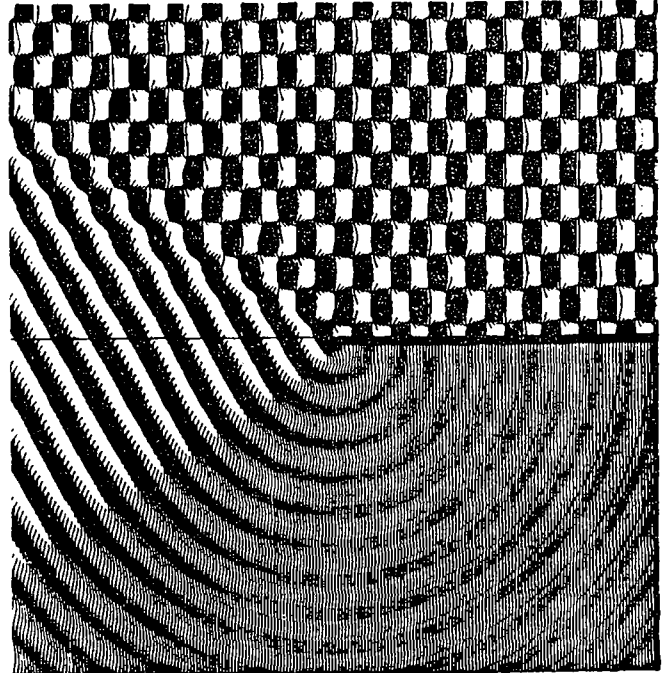
# INCIDENCE $-150^\circ$

## CHAMP TOTAL

Partie réelle

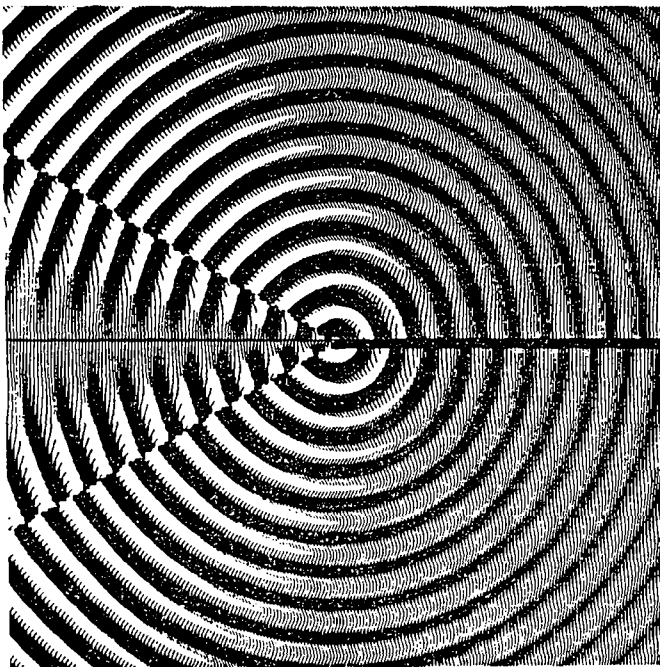


Partie imaginaire

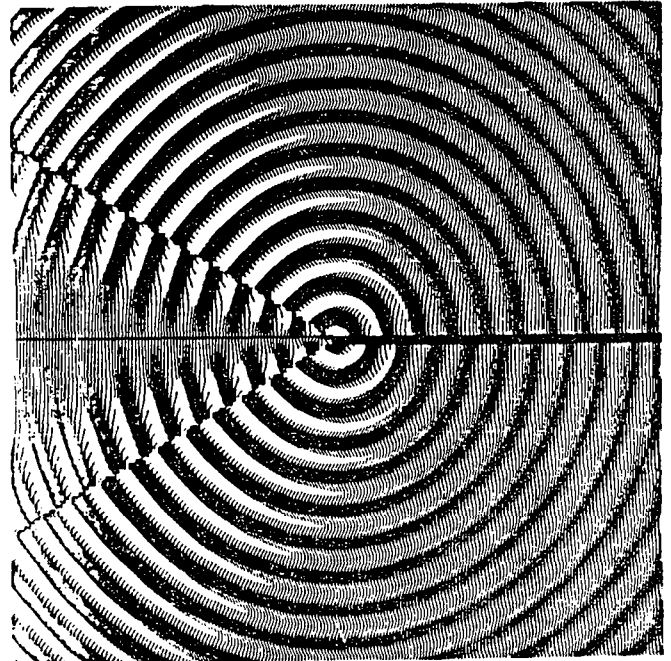


## CHAMP DIFFRACTÉ

Partie réelle



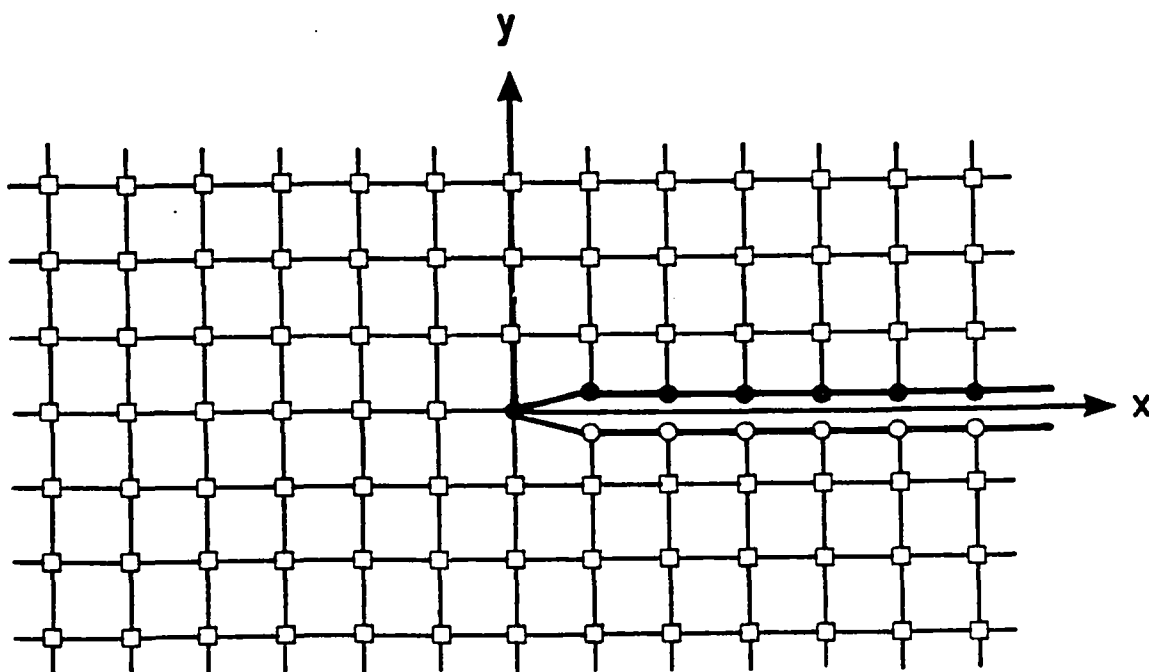
Partie imaginaire



#### 0.4. PRESENTATION DES SCHEMAS D'APPROXIMATION

La famille de schémas numériques que nous étudions est très classique. Il s'agit d'une famille, dépendant d'un paramètre réel  $\lambda$  variant dans l'intervalle  $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right]$ , de schémas variationnels construits sur une grille régulière de pas  $h$

dans les deux directions. Nous supposerons (c'est ce qui rendra l'analyse possible) que la fissure  $\Gamma$  coïncide avec l'une des lignes du maillage dont les nœuds seront les points  $M_{pq}$  de coordonnées  $(ph, qh)$ ,  $p$  et  $q$  variant dans l'ensemble  $\mathbb{Z}$ . Le traitement de la fissure nécessitera d'associer deux nœuds à chaque point  $M_{pq}$  de  $\Gamma$ , c'est-à-dire pour  $q = 0$  et  $p \geq 1$ , soient  $M_{pq}^+$  et  $M_{pq}^-$ . Les points  $M_{pq}^+$  matérialisent les nœuds de la lèvres supérieure de la fissure ( $\Gamma^+$ ) et les points  $M_{pq}^-$  ceux de la lèvres inférieure ( $\Gamma^-$ ). Ce dédoublement permet de modéliser des fonctions discontinues le long de la frontière  $\Gamma$ . Notons que par construction la solution approchée sera nécessairement continue à l'extrémité de la fissure (on peut par exemple associer à la solution discrète son interpolée Q1 [Ra], voir paragraphe 2.1 pour plus de détails).



L'espace  $V_h^F$  dans lequel on cherchera la solution discrète sera constitué d'éléments  $u_h$  définis par :

$$u_h = \left( ((u_{p,q}))_{(p,q) \in I}, (u_{p,o}^+)_{p \geq 1}, (u_{p,o}^-)_{p \geq 1}, u_{oo} \right)$$

où  $I = \{(p,q) \neq (k,o), k \in \mathbb{N}\}$  désigne l'ensemble des indices des nœuds intérieurs au domaine  $\Omega$ .

$\cdot ((u_{pq}))_{(p,q) \in I}$  désigne la solution à l'intérieur

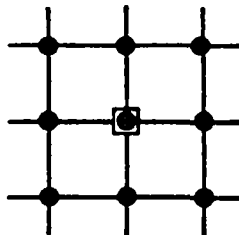
$\cdot (u_{p,o}^+)_{p \geq 1}$  désigne la trace de la solution sur la lèvresupérieure de la fissure

$\cdot (u_{p,o}^-)_{p \geq 1}$  désigne la trace de la solution sur la lèvresupérieure de la fissure

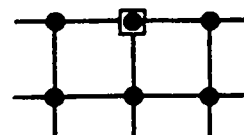
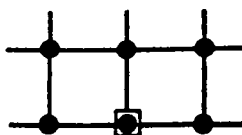
$\cdot u_{oo}$  valeur de la solution à l'extrémité de la fissure.

Les équations du schéma, ou équation de Helmholtz discrète, se séparent en :

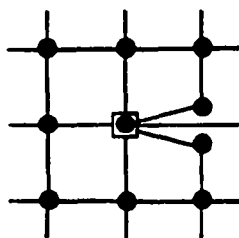
- les équations aux nœuds intérieurs  $M_{p,q}$   $(p,q) \in I$  qui sont de type classique et couplent neuf nœuds



- les équations aux noeuds  $M_{p,o}^+$  ou  $M_{p,o}^-$  qui couplent six noeuds



– L'équation à l'extrémité de la fissure qui couple dix nœuds



Nous ne donnerons pas ici le détail des équations qui seront explicitées au paragraphe 2.2. Quoi qu'il en soit, l'équation de Helmholtz discrète s'écrit sous forme abstraite :

$$(0.26) \quad -A_h u_h + \omega^2 u_h = 0$$

$A_h$  désignant un opérateur aux différences appliquant  $V_h^F$  dans lui-même. Pour faire le lien entre les cas discret et continu sur le plan de la structure mathématique des problèmes, il sera utile d'introduire le sous-espace de  $V_h^F$ , soit  $V_h^F \cap L_h^2$ , des éléments  $u_h$  pour lesquels :

$$(0.27) \quad \sum_{(p,q) \in I} |u_{p,q}|^2 h^2 + \sum_{p \geq 1} \left( |u_{p,0}^+|^2 + |u_{p,0}^-|^2 \right) \frac{h^2}{2} + |u_{0,0}|^2 h^2 < +\infty$$

$V_h^F \cap L_h^2$  n'est autre que l'équivalent discret de l'espace  $L^2(\Omega)$ . On peut bien entendu munir l'espace  $V_h^F \cap L_h^2$  ainsi défini d'une structure d'espace de Hilbert pour la norme :

$$(0.28) \quad \|u_h\|^2 = \sum_{(p,q) \in I} |u_{p,q}|^2 h^2 + \sum_{p \geq 1} \left( |u_{p,0}^+|^2 + |u_{p,0}^-|^2 \right) \frac{h^2}{2} + |u_{0,0}|^2 h^2$$

On vérifie aisément que l'opérateur  $A_h$  est un opérateur autoadjoint positif sur  $V_h^F \cap L_h^2$  de telle sorte que l'équation de Helmholtz discrète s'inscrit dans le même cadre mathématique que l'équation de Helmholtz continue, l'opérateur  $A_h$  venant se substituer à l'opérateur  $A$  défini par :



$$(0.29) \quad \begin{cases} D(A) = \left\{ u \in H^1(\Omega) / \Delta u \in L^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \right\} \\ Au = -\Delta u \quad \forall u \in D(A) \end{cases}$$

## 0.5. LE PROBLEME DE DIFFRACTION DISCRET

Comme en continu, le problème de la diffraction consiste en la recherche d'une solution particulière de (0.26) sous la forme :

$$(0.30) \quad u_h = u_T^h = u_I^h + u_D^h$$

où  $u_I^h$  désigne l'onde incidente, qui est la donnée du problème et  $u_D^h$  est l'onde diffractée.

L'onde incidente est une «solution» de l'équation d'Helmholtz «sans fissure». Elle est construite de la manière suivante :

Soit  $v_h$  un élément de l'espace des fonctions test sans fissure :

$$(0.31) \quad V_h = \{v_h = ((v_{pq}))_{(p,q) \in \mathbb{Z}^2}\}$$

solution de l'équation discrète

$$(0.32) \quad \Delta_h v_h + \omega^2 v_h = 0$$

ou  $\Delta_h$  désigne l'opérateur «Laplacien discret» qui coïncide avec l'opérateur  $-A_h$  aux nœuds intérieurs du maillage :

$$(\Delta_h v_h)_{pq} = -(A_h v_h)_{pq} \quad (p,q) \in I$$

L'onde incidente  $u_I^h$  est alors définie par :

$$(0.33) \quad \begin{cases} (u_I)_{p,q} = V_{pq} & (p,q) \in I \\ (u_I^+)_{p,o} = V_{p,o} & p \in N^* \\ (u_I^-)_{p,o} = V_{p,o} & p \in N^* \\ (u_I)_{o,o} = V_{oo} \end{cases}$$

Notons que, par construction, l'onde incidente est continue sur la fissure au sens du raccord des valeurs de l'onde sur les lèvres inférieure et supérieure de la fissure :

$$(0.34) \quad (u_I^+)_{p,o} = (u_I^-)_{p,o}$$

(Ainsi, on peut identifier  $V_h$  au sous-espace des fonctions de  $V_h^F$  qui sont continues au sens précédent), mais que l'équation d'Helmholtz initiale (0.26) n'est pas vérifiée sur la fissure, autrement dit :

$$(0.35) \quad -g_h = A_h u_I^h - \omega^2 u_I^h \neq 0$$

De façon plus précise,  $g_h$  est à support concentré sur la fissure, au sens où :

$$(0.36) \quad g_{pq} = 0 \quad \forall (p,q) \in I$$

Par linéarité, il est alors facile de voir que l'onde diffractée discrète est solution du problème non homogène :

$$(0.37) \quad -A_h u_D^h + \omega^2 u_D^h = g_h$$

qui est l'équivalent discret de l'équation d'Helmholtz avec donnée de Neumann, non homogène (0.13).

En pratique, nous nous intéresserons comme dans le cas continu, à une onde plane harmonique incidente dont la direction de propagation fait un angle  $\theta$  avec la fissure. Il s'agit bien entendu d'une onde plane numérique de telle sorte que, compte tenu du caractère dispersif du schéma numérique, cette onde n'est plus donnée par la formule (0.12), mais par :

$$(0.38) \quad v_{pq} = \exp i (k_x x + k_y y) \quad x = ph, \quad y = qh$$

où le vecteur d'onde  $k = (k_x, k_y)$  est entièrement déterminé par :

$$(0.39) \quad D_h(\omega, k) = 0$$

$$(0.40) \quad (k_x, k_y) = \omega_h(\theta) (\cos \theta, \sin \theta) \quad \omega_h(\theta) > 0$$

où (0.39) n'est autre que la relation de dispersion numérique du schéma pour l'équation aux nœuds intérieurs, c'est-à-dire celle qui correspond à l'opérateur  $-\Delta_h$  (voir [Ba ], [Be] ou [PR ]).

Bien sûr, comme c'est aussi le cas en continu, la solution de (0.37) n'est pas unique. Aussi convient-il de faire le choix de la solution physiquement acceptable, ou solution sortante, que l'on définit à l'aide du principe d'absorption limite :

$$(0.41) \quad u_D^h = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_D^{\varepsilon, h}$$

où la solution «amortie»  $u_D^{\varepsilon, h}$  est définie de façon unique par :

$$(0.42) \quad \begin{cases} -A_h u_D^{\varepsilon, h} + i\varepsilon \omega u_D^{\varepsilon, h} + \omega^2 u_D^{\varepsilon, h} = g_h \\ u_D^{\varepsilon, h} \in V_h^F \cap L_h^2 \end{cases}$$

Ainsi, le calcul effectif de l'onde diffractée  $u_D^h$  s'effectuera conformément à la démarche adoptée pour le traitement du cas continu, à savoir en deux étapes :

- calcul de la solution amortie  $u_D^{\varepsilon, h}$
- calcul de  $u_D^h$  par passage à la limite ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ).

C'est à nouveau au niveau du calcul de  $u_D^{\varepsilon h}$  que se situe la plus grosse partie du travail. Nous n'entrerons pas ici dans le détail technique, les calculs qui seront exposés au chapitre 2. Il est cependant intéressant de donner les principales étapes du calcul pour montrer le parallèle avec le traitement du cas continu exposé plus haut.

Nous distinguerons cinq phases :

(i) Réduction à un problème dans un demi-espace

En mettant à profit les symétries du problème, on se ramène à un problème vérifié par la restriction de  $u_D^{\varepsilon h}$  au demi-espace  $R_+^2$ ; ce problème est du type équation de Helmholtz avec données aux limites de type mixte :

$$(0.43) \quad \begin{cases} A_h u_D^{\varepsilon h} + i\varepsilon\omega + \omega^2 u_D^{\varepsilon h} = 0 & p \in Z, q \geq 1 \\ u_D^{\varepsilon h} = 0 & \text{en } (p,0), p \leq 0 \\ -A_h u_D^{\varepsilon h} + i\varepsilon\omega u_D^{\varepsilon h} + \omega^2 u_D^{\varepsilon h} = g_h & \text{en } (p,0), p > 0 \end{cases}$$

(ii) Utilisation de la transformation de Fourier partielle dans la direction x

En mettant à profit l'invariance du problème par translation dans la direction x, on peut faire appel à la transformation de Fourier discrète dans la direction x :

$$(u_D^{\varepsilon h})_{p,q} \rightarrow (\hat{u}_D^{\varepsilon h})_q(k) \quad k \in \left[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right]$$

(La transformation choisie sera précisée au paragraphe 2.3).

On montre alors que la suite  $(\hat{u}_D^{\varepsilon h})_q(k)$ ,  $q \geq 1$ , est solution d'une équation aux différences du second ordre dont la solution générale  $L^2$  s'écrit sous la forme :

$$(0.44) \quad \left( \hat{u}_D^{\varepsilon, h} \right)_q(k) = A_h(k) e^{i\varphi_h(k, \omega) qh}$$

où  $\varphi_h(k, \omega)$  est un nombre complexe de partie réelle strictement positive déterminé à partir de la relation de dispersion du schéma numérique et

$\hat{A}_h(k)$  désigne une constante qui reste à déterminer à l'aide des conditions aux limites.

(iii) Ecriture d'une équation de type Wiener-Hopf satisfaite par la fonction

$$\underline{k \rightarrow \hat{A}_h(k)}$$

Elle s'obtient simplement en injectant la formule (0.44) aux nœuds  $q = 0$  du maillage.

(iv) Résolution de l'équation de Wiener-Hopf

C'est le point clé de l'étude. Il sera détaillé au paragraphe 2.3.

v) Obtention d'une expression semi-analytique de la solution amortie

Cette expression sera obtenue par transformation de Fourier inverse. Elle se présentera sous la forme d'une intégrale le long d'un contour du plan complexe.

Il reste alors dans une deuxième étape à effectuer le passage à la limite quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . En pratique, ce passage à la limite n'est explicitement faisable que si l'on connaît explicitement l'onde incidente  $u_I^h$  considérée. Nous ferons ce passage à la limite lorsque cette onde incidente est l'onde plane harmonique définie par (0.38) et (0.39).

Décrivons maintenant, au moins de façon qualitative la solution obtenue.

Décomposition de la solution

Nous décomposerons dans un premier temps la solution totale  $u_h$  sous la forme :

$$(0.45) \quad u_T^h = u_G^h + u_*^h$$

$\begin{cases} u_G^h : \text{champ géométrique numérique} \\ u_*^h : \text{champ diffracté par l'extrémité de la fissure} \end{cases}$

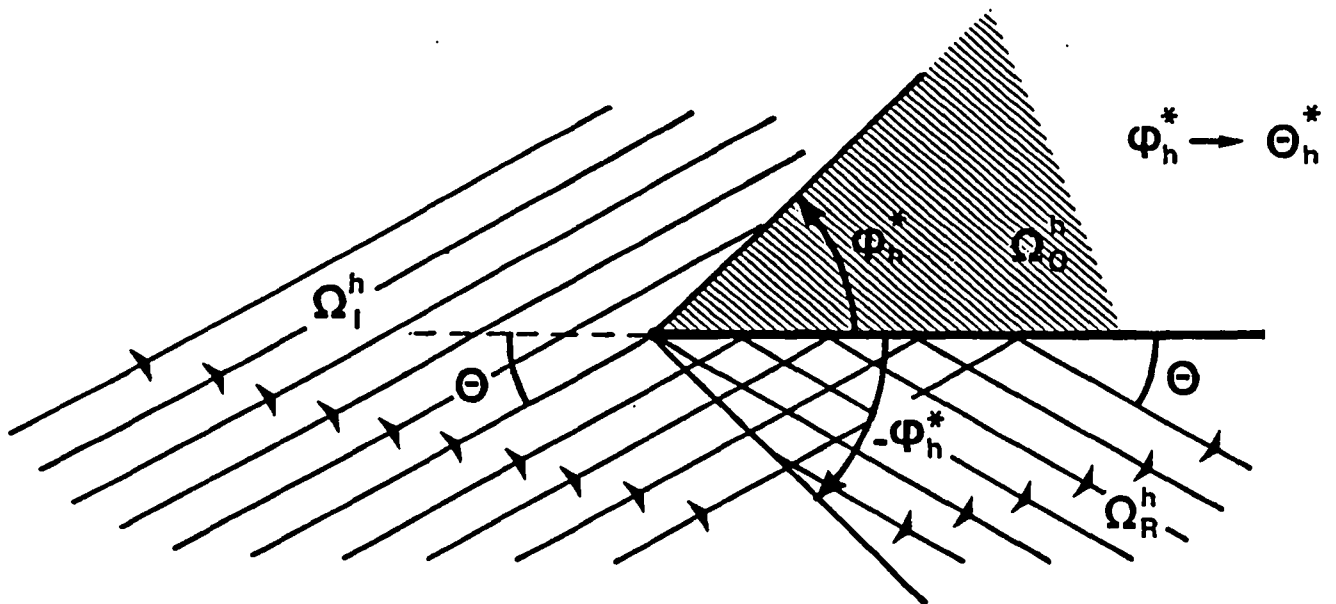
Cette décomposition est bien entendu l'équivalent discret de la décomposition (0.45).

i) Expression du champ géométrique  $u_G^h$

$$\Omega_o^h = \{(r, \Theta), 0 < \theta < \Theta_h^*(\omega, \theta)\} \quad \text{zone d'ombre numérique}$$

$$\Omega_R^h = \{(r, \Theta), -\Theta_h^*(\omega, \theta) < \Theta < 0\} \quad \text{zone réfléchie numérique}$$

$$\Omega_I^h = \{(r, \Theta), \Theta \in [-\theta, \Theta_h^*(\omega, \theta)]\} \quad \text{zone incidente numérique}$$



à partir de quoi on a :

$$(0.46) \quad \begin{cases} u_G^h = u_I^h & \text{pour } (ph, qh) \in \Omega_I^h \\ u_G^h = 0 & \text{pour } (ph, qh) \in \Omega_o^h \\ u_G^h = u_I^h + u_R^h & \text{pour } (ph, qh) \in \Omega_R^h \end{cases}$$

L'onde réfléchie  $u_R^h$  étant définie par :

$$(0.47) \quad \begin{cases} (u_R)_{p,q} e^{-i\omega t} = \exp i(k_x x - k_y y - \omega t) \text{ avec } (x, y) = (ph, qh) \\ D_h(\omega, k) = 0 \\ (k_x, -k_y) = \omega_h(\theta) (\cos \theta, -\sin \theta) \quad \omega_h(\theta) > 0 \end{cases}$$

On notera dès à présent que :

- La zone réfléchie numérique et la zone d'ombre numérique sont, comme dans le cas continu symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe de la fissure,
- La zone d'ombre numérique diffère de la zone d'ombre exacte dans la mesure où :

$$\Theta_h^*(\omega, \theta) \neq \theta \quad \text{pour } h \neq 0$$

On donnera un procédé géométrique simple de construction de l'application  $\theta \rightarrow \Theta_h^*(\omega, \theta)$ . Cette construction s'appuie sur les courbes de lenteur du schéma numérique (voir [Jo]), c'est-à-dire les courbes du plan  $(k_x, k_y)$  d'équations :

$$(0.48) \quad D_h(\omega, k) = 0$$

On illustrera en outre la convergence de la zone d'ombre numérique vers la zone d'ombre continue en établissant que :

$$\Theta_h^*(\omega, \theta) = \theta(1 + o(\omega^2 h^2))$$

## ii) Expression du champ $u_h^*$

Même après passage à la limite quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , cette expression se présente sous la forme d'une intégrale dans le plan complexe. D'un point de vue pratique, la comparaison de  $u^*$  et  $u_h^*$  est plus facile si on s'intéresse au comportement asymptotique de la solution loin de la fissure. C'est l'étude de ce comportement asymptotique qui fera l'objet du chapitre 3. Elle fait appel à une méthode de type «phase stationnaire», qui permet l'analyse du comportement d'intégrales de fonctions oscillantes le long de contours du plan complexe (voir [BP], [No]). Les calculs à mener sont en tous points similaires à ceux menés dans [Ba] pour l'étude du comportement des fonctions de Green discrètes. Ils permettront d'établir que, au moins lorsque le pas  $h$  du maillage est choisi suffisamment petit vis à vis de la longueur d'onde  $\lambda = \frac{2\pi}{\omega}$ .

$$(0.49) \quad u_h^* \underset{r \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{A_h(\omega, \theta, \Theta)}{\sqrt{\omega r}} e^{\left( \frac{i \omega r}{c_\infty^h(\omega, \Theta)} \right)}$$

(pour  $(ph, qh) = (r \cos \Theta, r \sin \Theta)$ )

où les quantités  $c_\infty^h(\omega, h)$  et  $A_h(\omega, \theta, \Theta)$  sont déterminées à partir des propriétés géométriques des courbes de lenteur du schéma numérique par l'intermédiaire de formules qui seront explicitées au chapitre 3.

La formule (0.49) montre qu'asymptotiquement, le champ diffracté  $u_h^*$  se comporte comme une onde sphérique «perturbée» dont :

- les fronts d'onde seront les courbes homothétiques de la courbe d'équation polaire :

$$(0.50) \quad r = c_\infty^h(\omega, \Theta)$$

- L'amplitude décroît comme  $r^{1/2}$  et se répartit le long du front d'onde



proportionnellement à la fonction  $\phi \rightarrow A_h(\omega, \theta, \Theta)$ .

Ces résultats peuvent être illustrés graphiquement par la représentation de deux familles de courbes :

- les fronts d'onde asymptotiques, donnés par l'équation (0.50) (pour différentes valeurs du paramètre adimensionnel  $\omega h$ ) ;
- les diagrammes d'amplitude asymptotiques, c'est-à-dire les courbes représentant, en coordonnées polaires les variations des fonctions  $\Theta \rightarrow A_h(\omega, \theta, \Theta)$  pour différentes valeurs de l'angle d'incidence  $\theta$  et du produit  $\omega h$ .

Comme le lecteur l'aura compris, seuls deux paramètres adimensionnels interviennent au niveau des résultats asymptotiques, à savoir :

- l'angle d'incidence  $\theta$
- le produit  $\omega h = \frac{2\pi}{N}$  où  $N$  désigne le nombre de points de grille par longueur d'onde ( $N = \frac{\lambda}{h}$ ).

Signalons que lorsque le nombre de points par longueur d'onde devient insuffisant, l'expression (0.49) n'est plus valable et un certain nombre de phénomènes parasites purement numériques prennent naissance. Certains de ces phénomènes seront décrits au chapitre 3 .

Remarques sur l'étude de la convergence de la solution approchée vers la solution exacte.

Les schémas ( $S_\lambda$ ) que nous considérons étant tous du second ordre, on pourrait s'attendre à ce que la solution approchée  $u_h$  converge vers la solution exacte  $u$  en  $O(h^2)$ . En fait, il n'en est rien et on verra que, pour tous les schémas  $S_\lambda$ , on a :

$$u - u_h = O(h) !$$

D'un point de vue théorique, cette perte d'un ordre doit être attribuée à la singularité du domaine  $\Omega$  qui entraîne une singularité de la solution, de telle sorte que les théorèmes généraux d'approximation pour les problèmes variationnels ne peuvent plus être appliqués ([Ra], [Ri], [Ci]). A un niveau plus technique, cette perte d'un ordre apparaîtra clairement au niveau de la méthode de Wiener-Hopf et plus précisément au cours des phases de décomposition multiplicative et additive de Wiener-Hopf qui seront décrites notamment au début du chapitre 1.

Nous serons du reste naturellement amenés à distinguer, au cours de l'analyse, deux sous-classes de schémas numériques :

- ceux correspondant à  $\frac{1}{2} < \lambda < \frac{3}{4}$
- ceux correspondant à  $\frac{3}{4} < \lambda < \infty$

Ces deux classes de schémas se différencieront notamment au niveau de l'étude du comportement asymptotique de l'onde diffractée et plus précisément des phénomènes parasites dus à la discrétisation spatiale.

Signalons enfin que :

- la distinction entre  $\lambda < \frac{3}{4}$  et  $\lambda > \frac{3}{4}$  s'introduit de façon naturelle lorsque l'on étudie la géométrie des courbe de dispersions.
- la perte d'un ordre d'approximation n'intervient qu'au niveau du champ  $u^h$  diffracté par la pointe de la fissure et non pas au niveau du champ géométrique qui, lui, est bien approché à l'ordre 2.

# **CHAPITRE 1**

## **RESOLUTION DU PROBLEME CONTINU**

## 1. RESOLUTION DU PROBLEME CONTINU

Dans ce paragraphe, nous traitons complètement et en détail le cas de la solution exacte. Bien sûr, ni le résultat obtenu ni les techniques utilisées ne sont nouvelles et notre présentation suivra pour l'essentiel la démarche exposée dans Noble [No], tout au moins en ce qui concerne la partie «calcul de la solution» proprement dite. Notre objectif dans ce paragraphe est triple. Il s'agit avant tout d'introduire les principales notations et les principales quantités qui nous serviront de référence pour la comparaison de la solution discrète et de la solution continue, ainsi que de fixer les principales étapes du calcul qui guideront, comme la rédaction essaiera de le faire apparaître, les calculs pour le traitement des schémas numériques (nous nous attacherons dans la mesure du possible à faire un parallèle entre les chapitres 1 et 2). Il s'agit également de donner une présentation simple de la méthode de Wiener-Hopf, beaucoup plus difficile à comprendre sur le traitement, plus complexe, du cas discret. Il s'agit enfin, et c'est sans doute là l'apport essentiel de ce chapitre sur le plan théorique, de faire une rédaction aussi rigoureuse que possible sur le plan mathématique, ce qui semble-t-il, n'avait pas été fait auparavant. Nous avons choisi notamment de présenter l'ensemble des calculs dans le cadre Hilbertien familier aux spécialistes des équations aux dérivées partielles. Cela amènera, comme on le verra, à une vision nouvelle de la technique de Wiener-Hopf.

La rédaction de ce chapitre est organisée comme suit. Après avoir réduit le problème de la diffraction à un problème dans le demi-espace  $\mathbb{R}^2_+$  (section (1.1), nous menons succinctement l'analyse mathématique de base du problème approché défini à l'aide du principe d'absorption limite (section 1.2). Nous montrons l'existence et l'unicité de la solution approchée  $u^\varepsilon$ ,  $\varepsilon$  représentant le paramètre d'absorption. Le problème théorique du passage à la limite quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  ne sera pas abordé ici. La partie correspondante de ce chapitre restera donc formelle.

Dans une deuxième étape nous menons de façon rigoureuse les calculs qui mènent à une expression semi-analytique de la solution approchée  $u^\varepsilon$ . Comme nous l'avons déjà dit dans le premier chapitre, c'est à ce niveau qu'intervient la méthode de Wiener-Hopf. Lorsque les données du problème sont très régulières, il est facile de présenter cette méthode dans le cadre des fonctions analytiques, tel que c'est fait dans Noble [No] par exemple. C'est ce que nous avons choisi de faire

au préalable, afin de nous familiariser avec cette technique, dans une sous-section 1.0.

## 1.0. La méthode classique de résolution

Rappelons que si l'on introduit la transformation de Fourier dans la direction  $x$  définie par :

$$\hat{\varphi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-ikx} dx \quad \forall \varphi \in L^1(\mathbb{R})$$

alors (voir chapitre 0), on montre que :

$$\begin{cases} \hat{u}^\varepsilon(k, y) = A_\varepsilon(k) e^{-(k^2 - \omega^2 + i\varepsilon\omega)^{1/2} y} \\ \operatorname{Re}(k^2 - \omega^2 + i\varepsilon\omega)^{1/2} > 0 \end{cases}$$

Bien sûr, par construction :

$$A_\varepsilon(k) = \hat{u}_\varepsilon(k, 0)$$

Mais si nous utilisons la conditions de Dirichlet  $u^\varepsilon(x, 0) = 0$  pour  $x < 0$ ,  $A(k)$  peut en fait être exprimée comme :

$$A_\varepsilon(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} u_\varepsilon(x, 0) e^{-ikx} dx$$

Introduisons maintenant un autre demi-transformée de Fourier, à savoir :

$$B_\varepsilon(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial y}(x, 0) e^{-ikx} dx$$

alors la condition de Neuman  $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y}(x,0) = -g(x)$  pour  $x > 0$ , se traduit simplement par :

$$(1.1) \quad (k^2 - \omega^2 + i\varepsilon\omega)^{1/2} A_\varepsilon(k) + B_\varepsilon(k) - \hat{g}(k) = 0$$

avec :

$$\hat{g}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} g(x) e^{-ikx} dx$$

c'est-à-dire une équation linéaire à deux inconnues, ce qui est a priori insuffisant pour pouvoir conclure. Or, aussi paradoxal que cela puisse paraître, la méthode de Wiener-Hopf va permettre de résoudre (1.1) de façon unique ! En effet, il faut se rappeler que les inconnues cherchées  $A^\varepsilon(k)$  et  $B^\varepsilon(k)$  sont des fonctions de la variable  $k$  et non pas des simples scalaires, afin de faire appel à des arguments d'analyticité et de comportement à l'infini. Pour cela, il va falloir prolonger les fonctions  $A(k)$  et  $B(k)$  au plan complexe et dans ce but nous ferons les hypothèses simplificatrices suivantes :

$$(1.2) \quad \begin{cases} |g(x)| \leq C e^{-\alpha|x|} & \forall x > 0 \\ |u^\varepsilon(x,0)| \leq C e^{-\alpha|x|} & \forall x > 0 \\ \left| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial y}(x,0) \right| \leq C e^{-\alpha|x|} & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

pour  $\alpha > 0$ , hypothèses qu'il sera toujours loisible de vérifier *a posteriori*. On peut alors définir les fonctions :

$$(1.3) \quad \left| \begin{array}{ll} \hat{g}^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} g(x) e^{-ixz} dx & \text{pour } \text{Im } z < \alpha \\ A_\varepsilon^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} u^\varepsilon(x,0) e^{-ixz} dx & \text{pour } \text{Im } z < \alpha \\ B_\varepsilon^-(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}(x,0) e^{-ixz} dx & \text{pour } \text{Im } z > \alpha \end{array} \right.$$

Si nous introduisons alors les domaines du plan complexes :

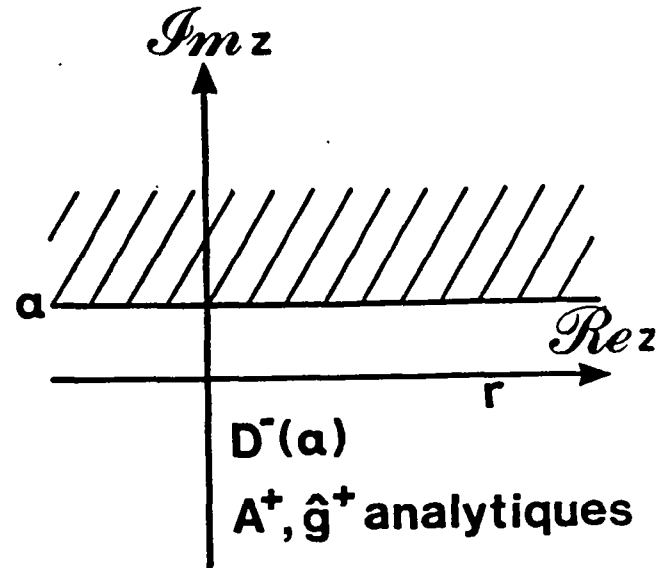
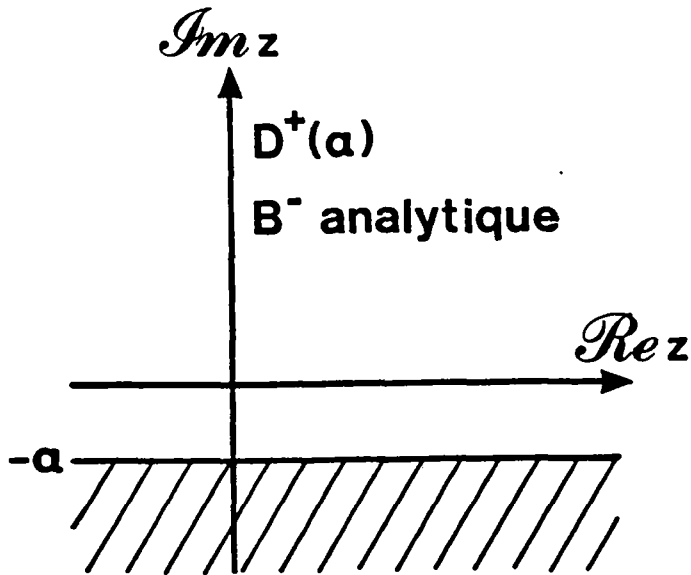
$$\left| \begin{array}{l} D^+(\alpha) = \{z / \text{Im } z > -\alpha\} \\ D^-(\alpha) = \{z / \text{Im } z < \alpha\} \\ B(\alpha) = \{z / |\text{Im } z| < \alpha\} = D^+(\alpha) \cap D^-(\alpha) \end{array} \right.$$

Il est facile de vérifier que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \hat{g}_\varepsilon^+(z) \text{ et } A_\varepsilon^+(z) \text{ sont analytiques dans } D^-(\alpha) \\ \bullet B_\varepsilon^-(z) \text{ est analytique dans } D^+(\alpha) \end{array} \right.$$

et que, sur l'axe réel :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \forall k \in \mathbb{R} \quad A_\varepsilon^+(k) = A_\varepsilon(k) \\ \bullet \forall k \in \mathbb{R} \quad B_\varepsilon^-(k) = B_\varepsilon(k) \end{array} \right.$$



Nous définissons maintenant un prolongement analytique  $\gamma_\varepsilon(z)$  de la fonction  $k \rightarrow (k^2 - \omega^2 + i\varepsilon\omega)^{1/2}$  dans la bande  $B(\beta)$ , avec  $\beta = \text{Im}(k^2 - \omega^2 + i\varepsilon\omega)^{1/2} > 0$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_\varepsilon(z) = (z^2 - \omega^2 + i\varepsilon\omega)^{1/2} \\ \gamma_\varepsilon(z) \text{ analytique dans } B(\beta) \\ \gamma_\varepsilon(k) = (k^2 - \omega^2 + i\varepsilon\omega)^{1/2} \end{array} \right.$$

Un tel prolongement est possible et unique dans la bande  $B(\beta)$  (cf. [No]). Nous en donnerons un au cours des calculs. Ainsi, en prenant  $\eta \leq \inf(\varepsilon, \alpha)$ , la fonction  $z \rightarrow (z^2 - \omega^2 + i\varepsilon\omega)^{1/2} A^+(z) + B^-(z) - g^+(z)$  est analytique dans la bande  $B(\eta)$  et



s'annule sur l'axe réel. Elle est donc identiquement nulle dans  $B(\eta)$  ce qui mène à l'équation de Wiener-Hopf :

$$(1.4) \quad (z^2 - \omega^2 + i\varepsilon\omega)^{1/2} A_{\varepsilon}^{+}(z) + B_{\varepsilon}^{-}(z) - \hat{g}^{+}(z) = 0 \quad \forall z \in B(\eta)$$

Le point délicat du calcul, quoique dans notre cas ce soit particulièrement simple, réside dans l'obtention d'une décomposition de Wiener Hopf de la fonction

$z \rightarrow \gamma_{\varepsilon}(z)$ , c'est-à-dire l'obtention de deux fonctions  $\gamma_{\varepsilon}^{+}(z)$  et  $\gamma_{\varepsilon}^{-}(z)$  telles que :

$$\begin{cases} \gamma_{\varepsilon}^{+}(z) \text{ est analytique dans } D^{+}(\varepsilon) \text{ et } |\gamma_{\varepsilon}^{+}(z)| \leq C|z|^{1/2} \\ \gamma_{\varepsilon}^{-}(z) \text{ est analytique dans } D^{-}(\varepsilon) \text{ et } |\gamma_{\varepsilon}^{-}(z)| \leq C|z|^{1/2} \\ \gamma_{\varepsilon}(z) = \gamma_{\varepsilon}^{+}(z) \gamma_{\varepsilon}^{-}(z) \text{ dans } B(\varepsilon) \end{cases}$$

Une fois cette décomposition réalisée, après avoir remarqué que  $\gamma_{\varepsilon}^{-}(z)$  ne s'annule pas dans la bande  $B(\eta)$  nous pouvons réécrire :

$$(1.5) \quad \gamma_{\varepsilon}^{+}(z) A_{\varepsilon}^{+}(z) - \frac{\hat{g}^{+}(z)}{\gamma_{\varepsilon}^{-}(z)} = - \frac{B_{\varepsilon}^{-}(z)}{\gamma_{\varepsilon}^{-}(z)}$$

C'est à ce niveau qu'intervient la deuxième phase importante du calcul qui

consiste à écrire la fonction  $G_{\varepsilon}(z) = \frac{\hat{g}^{+}(z)}{\gamma_{\varepsilon}^{-}(z)}$  comme la somme de deux fonctions (et

non plus le produit), l'une étant analytique dans le demi-plan  $D^{+}(\eta)$ , l'autre dans le demi-plan  $D^{-}(\eta)$ , chacune d'entre elle satisfaisant une condition à l'infini. Nous écrivons donc :

$$G_{\varepsilon}(z) = G_{\varepsilon}^{+}(z) + G_{\varepsilon}^{-}(z)$$

où :

$$\begin{cases} G_{\varepsilon}^{+}(z) \text{ est analytique dans } D^{-}(\eta) \\ G_{\varepsilon}^{-}(z) \text{ est analytique dans } D^{+}(\eta) \\ |G_{\varepsilon}^{+}(z)| \leq C|z|^{1/2} \text{ et } |G_{\varepsilon}^{-}(z)| \leq C|z|^{1/2} \end{cases}$$

Moyennant quoi nous aboutissons à :

$$(1.6) \quad \gamma_{\varepsilon}^{+}(z) A_{\varepsilon}^{+}(z) - G_{\varepsilon}^{+}(z) = - \frac{B_{\varepsilon}^{-}(z)}{\gamma_{\varepsilon}^{-}(z)} + G_{\varepsilon}^{-}(z)$$

Il reste alors à remarquer que :

$$\begin{cases} z \rightarrow \gamma_{\varepsilon}^{+}(z) A_{\varepsilon}^{+}(z) - G_{\varepsilon}^{+}(z) \text{ est analytique dans } D^{+}(\eta) \\ z \rightarrow - \frac{B_{\varepsilon}^{-}(z)}{\gamma_{\varepsilon}^{-}(z)} + G_{\varepsilon}^{-}(z) \text{ est analytique dans } D^{-}(\eta) \end{cases}$$

pour remarquer que la fonction  $H(z)$  définie, de façon unique, par les formules :

$$\begin{cases} H(z) = \gamma_{\varepsilon}^{+}(z) A_{\varepsilon}^{+}(z) - G_{\varepsilon}^{+}(z) \text{ dans } D^{+}(\eta) \\ H(z) = - \frac{B_{\varepsilon}^{-}(z)}{\gamma_{\varepsilon}^{-}(z)} + G_{\varepsilon}^{-}(z) \text{ dans } D^{-}(\eta) \end{cases}$$

est analytique dans  $C$ . Par ailleurs, elle vérifie, compte tenu des hypothèses (1.2) et du comportement à l'infini des fonctions  $(\gamma_{\varepsilon}^{+}, \gamma_{\varepsilon}^{-}, G_{\varepsilon}^{+}, G_{\varepsilon}^{-})$ , la majoration :

$$|H(z)| \leq C|z|^{1/2}$$

Par conséquent, d'après le théorème de Liouville [Ca]  $H(z)$  est identiquement nulle. En particulier :

$$\gamma_{\varepsilon}^{+}(z) A_{\varepsilon}^{+}(z) - G_{\varepsilon}^{+}(z) = 0 \text{ dans } D^{-}(\eta)$$

Donc, sur l'axe réel on a :

$$(1.7) \quad A_{\varepsilon}(k) = \frac{G_{\varepsilon}^{+}(k)}{\gamma_{\varepsilon}^{+}(k)}$$

ce qui détermine  $A^{\varepsilon}(k)$  et par conséquent la solution obtenue par transformation de Fourier inverse.

A ce stade de l'exposé, il nous semble important de faire quelques remarques.

L'obtention du résultat est lié à la résolution des deux problèmes suivants :

1. Etant donnée une fonction  $G(z)$  analytique dans la bande  $B(\eta)$ , trouver deux fonctions  $G^{+}(z)$  et  $G^{-}(z)$  telles que : (décomposition additive)

$$\left\{ \begin{array}{l} G(z) = G^{+}(z) + G^{-}(z) \text{ dans } B(\eta) \\ G^{+}(z) \text{ analytique dans } D^{-}(\eta) \\ G^{-}(z) \text{ analytique dans } D^{+}(\eta) \\ G^{+}(z) \text{ et } G^{-}(z) \text{ sont bornées en module par } C|z|^{1/2} \end{array} \right.$$

2. Etant donnée une fonction  $\gamma(z)$  analytique dans la bande  $B(\eta)$ , trouver deux fonctions  $\gamma^{+}(z)$  et  $\gamma^{-}(z)$  telles que (décomposition multiplicative) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma(z) = \gamma^{+}(z) \gamma^{-}(z) \text{ dans } B(\eta) \\ \gamma^{+}(z) \text{ analytique dans } D^{-}(\eta) \\ \gamma^{-}(z) \text{ analytique dans } D^{+}(\eta) \\ \gamma^{+}(z) \text{ et } \gamma^{-}(z) \text{ sont bornées en module par } C|z|^{1/2} \end{array} \right.$$

On peut montrer que :

- la décomposition  $G \rightarrow (G^{+}, G^{-})$  n'est unique qu'à une constante additive près,

- la décomposition  $\gamma \rightarrow (\gamma^+, \gamma^-)$  n'est unique qu'à une constante multiplicative près.

Cette non unicité peut paraître surprenante dans la mesure où le résultat (1.7) dépend directement du choix de  $G_\varepsilon^+$  et  $\gamma_\varepsilon^+$  c'est-à-dire des décompositions

$\gamma_\varepsilon \rightarrow (\gamma_\varepsilon^+, \gamma_\varepsilon^-)$  et  $G_\varepsilon \rightarrow (G_\varepsilon^+, G_\varepsilon^-)$ . En fait, il convient de signaler que :

- le choix de la constante additive dans la décomposition  $G_\varepsilon \rightarrow (G_\varepsilon^+, G_\varepsilon^-)$  sera fixé par des conditions de régularité sur la solution recherchée (on cherche l'unique solution  $L^2$ ) ;
- le choix de la constante multiplicative dans la décomposition  $\gamma_\varepsilon \rightarrow (\gamma_\varepsilon^+, \gamma_\varepsilon^-)$  n'a aucune incidence sur le résultat comme le montre l'analyse de (1.7).

En ce qui concerne l'obtention explicite des décompositions, on verra que celle-ci reste très simple pour le traitement du problème continu. Il n'en sera pas de même, loin s'en faut, pour le cas du problème discret.

Concernant l'existence théorique de ces décompositions, signalons que certains résultats, dans des hypothèses raisonnables, existent. Ainsi les formules :

$$(1.8) \quad \left\{ \begin{array}{ll} G^+(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty + i\sigma}^{+\infty + i\sigma} \frac{G(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta & -\eta < \sigma < \text{Im} z \\ G^-(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty - i\sigma}^{+\infty - i\sigma} \frac{G(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta & \text{Im} z < \sigma < \eta \end{array} \right.$$

définissent, sous réserve que les intégrales convergent, une décomposition  $G \rightarrow (G^+, G^-)$ . On peut alors obtenir la décomposition multiplicative en raisonnant sur la fonction  $\log G$ .

Nous donnerons ici une autre approche de la décomposition  $G \rightarrow (G^+, G^-)$ , plus appropriée à notre propos, qui fera appel à la transformation de Fourier et qui permettra de retrouver (1.8).

La difficulté que nous résoudrons au paragraphe 1.3 consiste à faire rentrer tous les calculs que nous venons d'exposer brièvement, dans un cadre mathématique rigoureux. Le résultat de cet effort sera l'obtention de théorèmes moyennant des hypothèses beaucoup plus faibles que celles faites ordinairement. Ces théorèmes viendront compléter ceux de la section 1.2. Pour intégrer la technique de Wiener-Hopf dans le cadre Hilbertien des espaces de Sobolev, nous serons amenés à raisonner non plus directement sur les fonctions analytiques mais sur les propriétés des transformées de Fourier de fonction  $L^2$  causales ou anticausales. Ces résultats seront obtenus à l'aide d'argument de densité et continuité. Dans la section 1.4, pour des données régulières, nous passons à la limite quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  pour obtenir la solution du problème général de la diffraction à partir du principe d'absorption limite. La section 1.5, la dernière de ce chapitre, est consacrée à la diffraction d'une onde plane incidente. Nous menons les calculs et donnons l'expression analytique de la solution puis étudions les propriétés de cette solution.

### 1.1. Les équations du problème. Réduction à un problème dans le demi-espace

Nous considérons donc l'équation d'Helmholtz dans le domaine  $\Omega = \mathbb{R}^2 - \Gamma$  avec condition au bord de Neuman, au sens précisé au chapitre 0 :

$$(1.9) \quad \begin{cases} \Delta u_T + \omega^2 u_T = 0 \\ \frac{\partial u_T}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0 \end{cases}$$

et nous cherchons une solution sous la forme :

$$u_T = u_I + u_D$$

où  $u_I$  est l'onde incidente, solution de l'équation d'Helmholtz dans tout l'espace, (donnée du problème) et  $u_D$  l'onde diffractée recherchée solution du problème non homogène :

$$(1.10) \quad \begin{cases} \Delta u_D + \omega^2 u_D = 0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u_D}{\partial n} = - \frac{\partial u_I}{\partial n} & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Ce problème est en fait équivalent au problème suivant (avec des notations évidentes, voir introduction) :

$$(1.11) \quad \begin{cases} \Delta u_D + \omega^2 u_D = 0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u_D}{\partial y}(x, 0^+) = -g(x) & x > 0 \\ \frac{\partial u_D}{\partial y}(x, 0^-) = +g(x) & x > 0 \end{cases}$$

$$\text{où} \quad g(x) = + \frac{\partial u_I}{\partial y}(x, 0)$$

Il est clair que la solution sortante unique de (1.11) est impaire par rapport à  $y$ . Il suffit en effet de remarquer que si  $u_D(x, y)$  est solution de (1.11) alors  $-u_D(x, -y)$  est également solution de (1.11). par conséquent,  $u_D$  étant régulière dans  $\Omega$  on en déduit que :

$$u_D(x, 0) = 0 \quad \text{pour } x < 0$$

Par conséquent, nous avons montré (de façon formelle) que la restriction au demi-espace  $\mathbb{R}^2_+$  de  $u_D$  était solution du problème mixte :

$$(1.12) \quad \begin{cases} \Delta u_D + \omega^2 u_D = 0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u_D}{\partial y}(x, 0) = -g(x) & \text{pour } x > 0 \\ u_D(x, 0) = 0 & \text{pour } x < 0 \end{cases}$$

Réciproquement, il est facile de voir que si  $u_D$  est solution de (1.12), alors sa prolongée par imparité (par rapport à la variable  $y$ ) est solution du problème initial (1.11) ; en ce sens, les problèmes (1.11) et (1.12) sont équivalents et c'est donc au problème dans le demi-espace  $\mathbb{R}^2_+$ , (1.12) que nous nous intéresserons dans toute la suite.

Pour analyser (1.12), nous passerons comme nous l'avons déjà dit, par le principe d'absorption limite qui consiste rappelons-le, à considérer la solution sortante de (1.12) comme la limite quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , de l'unique solution  $L^2$  du problème «avec amortissement»

$$(1.13) \quad \begin{cases} \Delta u_D^\varepsilon + \omega^2 u_D^\varepsilon + i\varepsilon\omega u_D^\varepsilon = 0 & \text{dans } \mathbb{R}_+^2 \\ u_D^\varepsilon(x,0) = 0 & x < 0 \\ \frac{\partial u_D^\varepsilon}{\partial y}(x,0) = -g(x) & x > 0 \end{cases}$$

C'est ce problème que nous allons étudier en détail dans les sections 1.2 et 1.3. Afin de ne pas surcharger les notations, nous oublierons dans ce qui suit l'indice D correspondant à l'onde diffractée et ferons donc le changement de notation :

$$\begin{cases} u_D^\varepsilon \rightarrow u^\varepsilon \\ u_D \rightarrow u \end{cases}$$

## 1.2. Analyse théorique du problème approché

Nous considérons donc le problème :

$$(1.14) \quad \begin{cases} \Delta u^\varepsilon + (\omega^2 + i\varepsilon\omega) u^\varepsilon = 0 & \text{dans } \mathbb{R}_+^2 \\ u^\varepsilon = 0 & \text{sur } (\Gamma^-) \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial y}(x,0) = -g(x) & x > 0 \end{cases}$$

Le but de cette section est l'obtention d'un résultat d'existence et d'unicité pour le problème (1.14). Ce n'est qu'au paragraphe 1.2 que nous donnerons la méthode d'obtention de cette solution. Nous ferons ici l'hypothèse :

$$(1.15) \quad g \in H^{-1/2}(\mathbb{R})$$

Nous avons alors le :

### Théorème 1.1.

Avec l'hypothèse (1.15), le problème (1.14) admet une solution unique  $u^\varepsilon$  dans  $H^1(\mathbb{R}_+^2)$ , telle que  $Du^\varepsilon$  appartienne à  $L^2(\mathbb{R}_+^2)$ . De plus on a les estimations a priori ( $||.||$  désignant la norme usuelle de  $L^2(\mathbb{R}_+^2)$ ) :

$$(1.16) \quad ||u^\varepsilon|| \leq \left( 1 + \frac{(1 + \omega^2)^2}{\varepsilon \omega} \right)^{1/2} ||g||_{-1/2, \Gamma}$$

$$(1.17) \quad ||\nabla u^\varepsilon|| \leq \left( 1 + \frac{(1 + \omega^2)^2}{\varepsilon \omega} \right)^{1/2} ||g||_{-1/2, \Gamma}$$

$$(1.18) \quad ||\Delta u^\varepsilon|| \leq \left( 1 + \frac{(1 + \omega^2)^2}{\varepsilon \omega} \right)^{1/2} (\omega^4 + \varepsilon^2 \omega^2)^{1/2} ||g||_{-1/2, \Gamma}$$

où  $||g||_{-1/2, \Gamma}$  désigne la norme de  $g$  dans  $H^{-1/2}(\Gamma)$

### Démonstration

Dans tout ce qui suit nous noterons :

$$\begin{aligned} (u, v) &= \int_{\mathbb{R}_+^2} u \bar{v} \, dx dy & \forall (u, v) \in L^2(\mathbb{R}_+^2) \\ ||u||^2 &= \int_{\mathbb{R}_+^2} |u|^2 \, dx dy & \forall u \in L^2(\mathbb{R}_+^2) \end{aligned}$$

La formulation variationnelle de notre problème s'écrit alors simplement :

$$(1.19) \quad (\nabla u^\varepsilon, \nabla v) - (\omega^2 + i\varepsilon\omega) (u^\varepsilon, v) = \langle g, \gamma_0 u^\varepsilon \rangle_\Gamma$$



où nous avons posé :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \Gamma = \{(x,0), x > 0\} \text{ (la fissure)} \\ \bullet \langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma} \text{ la dualité } H^{-1/2}(\Gamma), H^{1/2}(\Gamma) \\ \bullet \gamma_0 \text{ l'opérateur trace sur } \Gamma (\gamma_0 \in L(H^1(\mathbb{R}_+^2), H^{1/2}(\Gamma))) \end{array} \right.$$

Il est alors classique que le résultat d'existence et d'unicité découle, grâce à la méthode de Galerkin ([Da]), de l'obtention formelle des estimations a priori (1.16) à (1.18).

Pour cela nous faisons  $v = u^\varepsilon$  dans (1.19) ce qui nous donne la première identité :

$$||\nabla u^\varepsilon||^2 - (\omega^2 + i\varepsilon\omega) ||u^\varepsilon||^2 = \langle g, \gamma_0 u^\varepsilon \rangle_{\Gamma}$$

D'où nous tirons les deux égalités :

$$(1.20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon\omega ||u^\varepsilon||^2 = \text{Im}(\langle g, \gamma_0 u^\varepsilon \rangle_{\Gamma}) \\ ||\nabla u^\varepsilon||^2 - \omega^2 ||u^\varepsilon||^2 = \text{Re}(\langle g, \gamma_0 u^\varepsilon \rangle_{\Gamma}) \end{array} \right.$$

Dans une deuxième étape, nous multiplions par  $\Delta u_\varepsilon$  l'équation :

$$(1.21) \quad \Delta u^\varepsilon + (\omega^2 + i\varepsilon\omega) u^\varepsilon = 0$$

puis nous intégrons le résultat sur  $\mathbb{R}_+^2$ . En utilisant les conditions aux limites nous obtenons :

$$||\Delta u^\varepsilon||^2 - (\omega^2 + i\varepsilon\omega) ||\nabla u^\varepsilon||^2 = (\omega^2 + i\varepsilon\omega) \langle g, \gamma_0 u^\varepsilon \rangle_{\Gamma}$$

d'où nous tirons les deux égalités :

$$(1.22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon\omega ||\nabla u^\varepsilon||^2 = \text{Im}((\omega^2 + i\varepsilon\omega) \langle g, \gamma_0 u^\varepsilon \rangle_{\Gamma}) \\ ||\Delta u^\varepsilon||^2 - \omega^2 ||\nabla u^\varepsilon||^2 = \text{Re}((\omega^2 + i\varepsilon\omega) \langle g, \gamma_0 u^\varepsilon \rangle_{\Gamma}) \end{array} \right.$$

De (1.20) et (1.22), nous déduisons aisément :

$$(1.23) \quad \varepsilon \omega (||u^\varepsilon||^2 + ||\nabla u^\varepsilon||^2) = \text{Im} ((1 + \omega^2 + i\varepsilon\omega) \langle g, \gamma_0 u^\varepsilon \rangle)$$

Or, nous avons l'estimation :

$$|\text{Im} ((1 + \omega^2 + i\varepsilon\omega) \langle g, \gamma_0 u^\varepsilon \rangle)| \leq [(1 + \omega^2)^2 + \varepsilon^2 \omega^2]^{1/2} ||g||_{-1/2, \Gamma} ||\gamma_0 u^\varepsilon||_{1/2, \Gamma}$$

(où  $||\cdot||_{s, \Gamma}$  désigne la norme dans  $H^s(\Gamma)$ ) et par le théorème de traces dans  $H^1(\mathbb{R}^2_+)$  nous avons :

$$||\gamma_0 u^\varepsilon||_{1/2, \Gamma} \leq (||u^\varepsilon||^2 + ||\nabla u^\varepsilon||^2)^{1/2}$$

ce qui reporté dans (1.23) fournit l'estimation :

$$||\nabla u^\varepsilon||^2 \leq \left( \frac{(1 + \omega^2)^2 + \varepsilon^2 \omega^2}{\varepsilon \omega} \right) ||g||_{-1/2, \Gamma}^2$$

et il suffit alors de réutiliser l'égalité (1.21) pour obtenir l'estimation sur  $||\nabla u^\varepsilon||^2$ .

#### Remarque sur la régularité requise pour la donnée de Neuman $g(x)$

On notera que si le problème 1.14 admet une solution dans  $H^1(\Omega)$  alors nécessairement, sa trace sur  $\Gamma = \{x, 0\}, x > 0\}$  vérifie :

$$(1.24) \quad \gamma_0 u^\varepsilon \in H_{oo}^{1/2}(\Gamma)$$

Nous renvoyons à [Li] pour la définition de  $H_{oo}^{1/2}$ . Rappelons simplement que  $H_{oo}^{1/2}(\Gamma)$  est l'espace des fonctions de  $H^{1/2}(\Gamma)$  dont le prolongement par 0 est dans  $H^{1/2}(\mathbb{R})$ . Cet espace est strictement inclus et dense dans  $H^{1/2}(\Gamma)$ .

Cette remarque permet de s'apercevoir que le résultat d'existence et d'unicité pour le problème (1.14) peut s'étendre à des données  $g$  moins régulières que  $H^{1/2}(\Gamma)$ , à savoir :

$$(1.25) \quad g \in (H_{\infty}^{1/2})'(\Gamma)$$

(Par dualité, il est clair que  $H^{-1/2} \hookrightarrow (H_{\infty}^{1/2})'$  avec inclusion dense mais stricte).

De la même façon, le lecteur se convaincra aisément que les résultats que nous établirons au paragraphe 1.3 s'étendent sans difficulté majeure (si ce n'est technique) à des données dans l'espace  $(H_{\infty}^{1/2})'(\Gamma)$ .

#### Remarques sur le passage à la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$

Notons que les estimations sur  $||u^\varepsilon||$ ,  $||\nabla u^\varepsilon||$ ,  $||\Delta u^\varepsilon||$  données par (1.16), (1.17) et (1.18) explosent en  $1/\varepsilon$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . En fait, on peut effectivement montrer que ces normes explosent lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0 et ce, non à cause d'une perte de régularité locale, mais en raison du comportement de la solution à l'infini. En fait, on peut montrer que la solution approchée  $u^\varepsilon$  converge effectivement, mais seulement localement :

$$(1.26) \quad u^\varepsilon \rightarrow u \text{ dans } L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}_+^2)$$

C'est le principe d'absorption limite. La fonction limite  $u$  est appelée solution sortante du problème limite :

$$\begin{cases} \Delta u + \omega^2 u &= 0 & \text{dans } \mathbb{R}_+^2 \\ u(x,0) &= 0 & x < 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) &= -g(x) & x > 0 \end{cases}$$

et peut être également caractérisée par une condition à l'infini dite condition de radiation de Sommerfeld. Pour ce qui concerne le principe d'absorption limite qui n'est pas ici notre propos, nous renvoyons le lecteur à Wilcox [Wi] par exemple.

Pour ce qui nous concerne, nous nous contenterons de savoir que la solution sortante  $u$  qui nous intéresse est obtenu par passage à la limite. Il est donc

naturel de décomposer le calcul de  $u$  en deux étapes, comme nous l'avons déjà dit au chapitre 0.

(i) Calcul de la solution approchée  $u_\varepsilon$  : c'est l'objet de la section 1.3.

(ii) Passage à la limite quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  : c'est l'objet de la section 1.4.

### 1.3. Calcul de la solution approchée par la méthode de Wiener Hopf

#### a) Utilisation de la transformée de Fourier

Nous utilisons la transformation de Fourier partielle dans la direction transverse  $x$  :

$$u^\varepsilon(x,y) \xrightarrow{F} \hat{u}^\varepsilon(k,y)$$

où la transformation choisie prolonge à  $L^2$  celle définie sur  $L^1$  par :

$$\hat{\varphi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-ikx} dx$$

Des propriétés de  $F$  nous déduisons que, pour chaque valeur de  $k$ , la fonction  $\hat{u}^\varepsilon(k,y)$  est solution de l'équation différentielle ordinaire :

$$(1.27) \quad + \frac{d\hat{u}^\varepsilon}{dy}(k,y) + (\omega^2 - k^2 + i\varepsilon\omega) \hat{u}^\varepsilon(k,y) = 0$$

L'unique solution  $L^2$  de (1.27) est évidemment donnée par :

$$(1.28) \quad \begin{cases} \hat{u}^\varepsilon(k,y) = \hat{A}_\varepsilon(k) e^{-\gamma_\varepsilon(k)y} \\ \hat{A}_\varepsilon(k) = \hat{u}^\varepsilon(k,0) \end{cases}$$

où la fonction  $\gamma_\varepsilon(k)$  est définie par :

$$(1.29) \quad \begin{cases} \gamma_\varepsilon(k) = (\omega^2 - k^2 + i\varepsilon\omega)^{1/2} \\ \operatorname{Re}(\gamma_\varepsilon(k)) > 0 \end{cases}$$

Il reste maintenant à utiliser les conditions aux limites pour déterminer la fonction  $\hat{u}_\varepsilon(k,0)$ . Notons que la formule (1.28) peut se réécrire :

$$u^\varepsilon = R_\varepsilon(\gamma_0 u_\varepsilon)$$

où  $R_\varepsilon$  désigne l'opérateur de relèvement linéaire continu de  $H^{1/2}(\mathbb{R})$  dans  $H^1(\mathbb{R}^2_+)$  défini par :

$$\widehat{(R_\varepsilon \varphi)}(k,y) = \hat{\varphi}(k) e^{-\gamma_\varepsilon(k)y}$$

l'égalité ci-dessus traduisant simplement que :

$$(1.30) \quad \Delta u^\varepsilon + (\omega^2 + i\varepsilon\omega) u^\varepsilon = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^2_+$$

Remarquons alors que de (1.28), nous tirons l'égalité :

$$(1.31) \quad \frac{d\hat{u}^\varepsilon}{dy}(k,0) = -\gamma_\varepsilon(k) \hat{u}^\varepsilon(k,0)$$

Autrement dit, si nous introduisons l'opérateur  $T_\varepsilon$  par :

$$\begin{array}{ccc} & T_\varepsilon & \\ & \longrightarrow & \\ H^{1/2}(\mathbb{R}) & & H^{-1/2}(\mathbb{R}) \\ \downarrow F & & \downarrow F \\ F H^{1/2}(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\hat{T}_\varepsilon} & F H^{-1/2}(\mathbb{R}) \end{array}$$

avec :  $(\hat{T}_\varepsilon \hat{\phi})(k) = \gamma_\varepsilon(k) \hat{\phi}(k)$

(où  $FH^s(\mathbb{R}) = \left\{ \hat{u}(k) \in S'(\mathbb{R}) / (1 + |k|^2)^{-\frac{s}{2}} \cdot \hat{u}(k) \in L^2(\mathbb{R}) \right\}$ )

Il est clair que  $T_\varepsilon$  est un élément de  $L(H^{1/2}(\mathbb{R}), H^{-1/2}(\mathbb{R}))$  et que l'égalité (1.31) peut se réécrire :

(1.32)  $\gamma_0 \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial y} = T_\varepsilon(\gamma_0 u^\varepsilon)$

b) Décomposition de Wiener-Hopf multiplicative de l'opérateur  $T_\varepsilon$  :

Nous allons maintenant donner une décomposition de l'opérateur  $T_\varepsilon$  sous la forme :

(1.33)  $T_\varepsilon = T_\varepsilon^+ \circ T_\varepsilon^-$

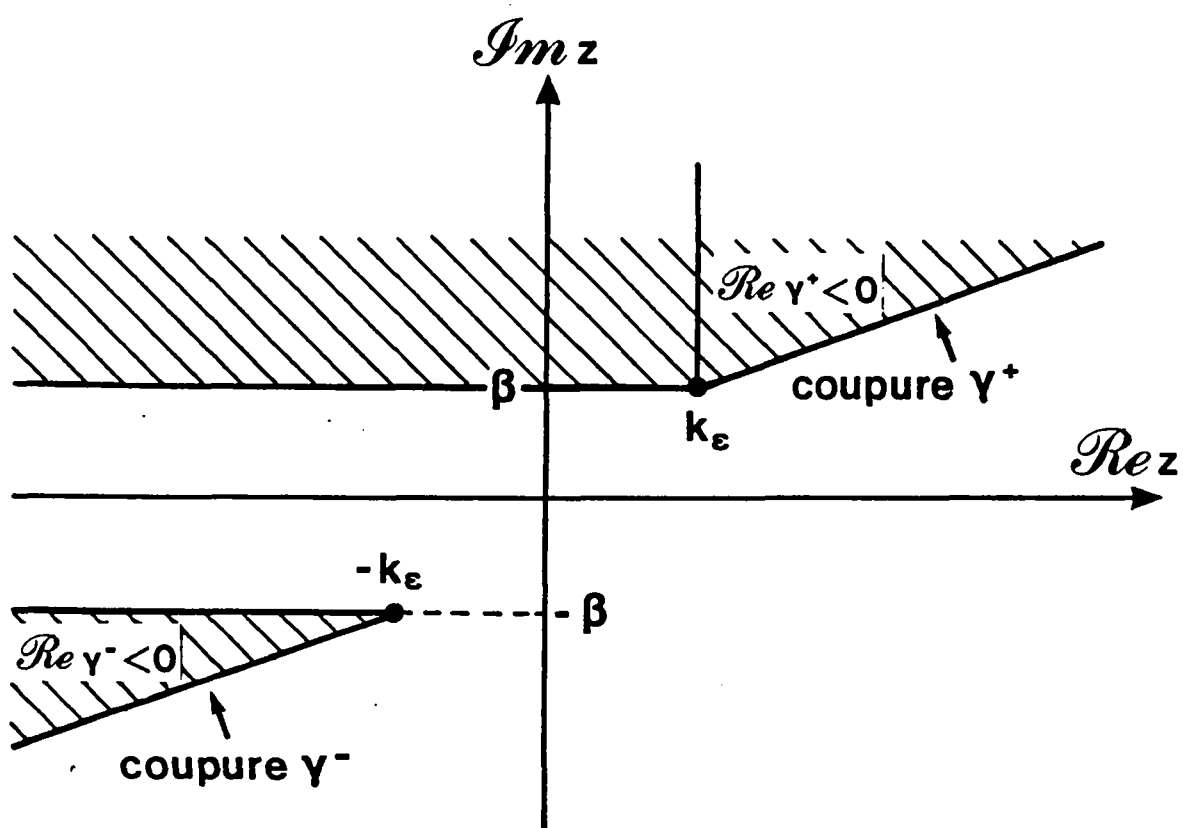
où  $\begin{cases} T_\varepsilon^+ \in L(H^{1/2}(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R})) \\ T_\varepsilon^- \in L(L^2(\mathbb{R}), H^{-1/2}(\mathbb{R})) \end{cases}$

qui va être l'équivalent sous forme «opérateurs» de la décomposition multiplicative de Wiener Hopf dont nous avons parlé dans le préambule de ce chapitre.

Pour cela, nous définissons deux fonctions dans le plan complexe :

(1.34)  $\begin{cases} \gamma_\varepsilon^+(z) = (z - k_\varepsilon)^{1/2} \\ \gamma_\varepsilon^-(z) = (z + k_\varepsilon)^{1/2} \end{cases} \quad k_\varepsilon = (\omega^2 + i\varepsilon\omega)^{1/2} \quad \text{Re } k_\varepsilon > 0$

où les racines carrées sont déterminées à partir des coupures du plan complexe suivantes :



Notons que lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\beta \sim \frac{\varepsilon}{2}$  et que pour tout  $\varepsilon$ ,  $\beta$  est supérieur à  $\frac{\varepsilon}{2}$ .

Le choix exact des coupures pour les fonctions  $\gamma_\varepsilon^+(z)$  et  $\gamma_\varepsilon^-(z)$  n'est pas réellement important, mais il est fondamental que l'on ait :

- la coupure pour  $\gamma_\varepsilon^+(z)$  est incluse dans le demi-plan complexe  $\{\text{Im}z \geq \beta\}$
- la coupure pour  $\gamma_\varepsilon^-(z)$  est incluse dans le demi-plan complexe  $\{\text{Im}z \leq -\beta\}$ .

Nous pouvons alors résumer les propriétés intéressantes des fonctions  $\gamma_\varepsilon^+(z)$  et  $\gamma_\varepsilon^-(z)$  dans le :

Lemme 1.1.

Les fonctions  $\gamma_\varepsilon^+(z)$  et  $\gamma_\varepsilon^-(z)$  ont les propriétés suivantes :

- (i)  $\gamma_\varepsilon^+(z)$  est analytique dans  $D^-(\beta) = \{\text{Im}z < \beta\}$   
 $\gamma_\varepsilon^-(z)$  est analytique dans  $D^+(\beta) = \{\text{Im}z > -\beta\}$
- (ii) La fonction  $\gamma_\varepsilon(z) = \gamma_\varepsilon^+(z) \gamma_\varepsilon^-(z)$  est analytique dans la bande  $B(\beta) = \{-\beta < \text{Im}z < \beta\}$  et prolonge la fonction  $\gamma_\varepsilon(k)$  définie par (1.34).
- (iii) Les fonctions  $\gamma_\varepsilon^+(z)$  et  $\gamma_\varepsilon^-(z)$  sont majorées en module par  $C|z|^{1/2}$ .
- (iv) Il existe des constantes positives  $C_*(\omega)$  et  $C^*(\omega)$  telles que :

$$\forall k \in \mathbb{R} \quad \frac{C_*(\omega)}{\varepsilon} \leq \frac{\gamma_\varepsilon^+(k)}{(1+k^2)^{1/4}} \leq \frac{C^*(\omega)}{\varepsilon}$$

$$\forall k \in \mathbb{R} \quad \frac{C_*(\omega)}{\varepsilon} \leq \frac{\gamma_\varepsilon^-(k)}{(1+k^2)^{1/4}} \leq \frac{C^*(\omega)}{\varepsilon}$$



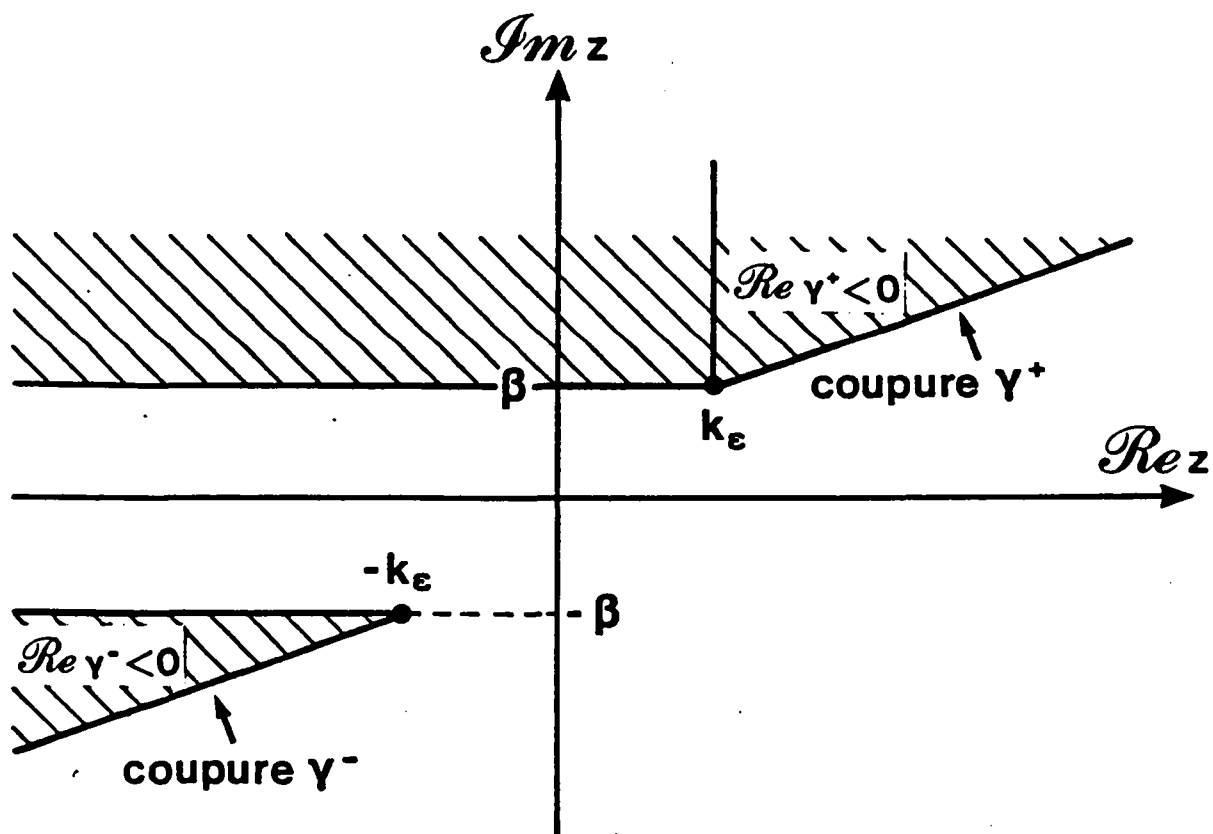
### Démonstration du lemme

Les points (i) et (ii) sont pratiquement évidents.

Le fait que  $\gamma_\varepsilon(z)$  prolonge  $\gamma_\varepsilon(k)$  vient du fait que pour  $k$  réel on a :

$$\begin{cases} \operatorname{Re} \gamma_\varepsilon^+(k) > 0 \\ \operatorname{Re} \gamma_\varepsilon^-(k) > 0 \end{cases}$$

comme l'indique le dessin ci-dessous :



Le point (iii) est immédiat et (iv) résulte du fait que  $\gamma_\varepsilon^+(k)$  ne s'annule pas pour  $k$  décrivant  $R$  et est équivalent à  $|k|^{1/2}$  lorsque  $|k|$  tend vers  $+\infty$   $\square$ .

Nous pouvons maintenant définir les opérateurs  $T_\varepsilon^+$  et  $T_\varepsilon^-$  par les diagrammes :

$$\begin{array}{ccc}
 H^{s+1/2} & \xrightarrow{T_\varepsilon^+} & H^s(R) \\
 \downarrow F & \hat{T}_\varepsilon^+ & \downarrow F \\
 FH^{s+1/2} & \longrightarrow & FH^s(R)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 H^{s+1/2}(R) & \xrightarrow{T_\varepsilon^-} & H^s(R) \\
 \downarrow F & \hat{T}_\varepsilon^- & \downarrow F \\
 FH^{s+1/2}(R) & \longrightarrow & FH^s(R)
 \end{array}$$

avec par définition :

$$(1.35) \quad \begin{cases} (\hat{T}_\varepsilon^+ \hat{\varphi})(k) = \gamma_\varepsilon^+(k) \hat{\varphi}(k) & \forall \hat{\varphi} \in L^2(R) \\ (\hat{T}_\varepsilon^- \hat{\varphi})(k) = \gamma_\varepsilon^-(k) \hat{\varphi}(k) & \forall \hat{\varphi} \in L^2(R) \end{cases}$$

Bien entendu, on déduit des propriétés des fonctions  $\gamma_\varepsilon^+$  et  $\gamma_\varepsilon^-$  énoncées au lemme 1.1 que :

- $T_\varepsilon^+$  (resp  $T_\varepsilon^-$ ) est un isomorphisme de  $H^{s+1/2}(R)$  dans  $H^s(R)$ , pour tout  $s$  dans  $R$ .

En particulier, on voit que :

$$\left| \begin{array}{l} T_\varepsilon^+ \in L(H^{1/2}(R); L^2(R)) \\ T_\varepsilon^- \in L(L^2(R); H^{-1/2}(R)) \\ T_\varepsilon = T_\varepsilon^- \circ T_\varepsilon^+ \end{array} \right.$$

et l'on obtient ainsi la décomposition de Wiener Hopf multiplicative de  $T_\varepsilon$ . On notera que, lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0 les normes de  $T_\varepsilon^+$ ,  $T_\varepsilon^-$  et  $T_\varepsilon$  explosent comme  $1/\varepsilon$ , ce qui est à rapprocher des estimations obtenues au théorème 1.1.

Nous désignerons par  $S_\varepsilon^+$  et  $S_\varepsilon^-$  les opérateurs régularisants de  $H^s(R)$  dans  $H^{s+1/2}(R)$ , inverses respectifs de  $T_\varepsilon^+$  et  $T_\varepsilon^-$ . Par transformation de Fourier, ils sont bien entendu définis par :

$$(1.36) \quad \left\{ \begin{array}{l} (S_{\varepsilon}^{+} \varphi)(k) = \frac{\hat{\varphi}(k)}{\gamma_{\varepsilon}^{+}(k)} \quad \forall \hat{\varphi} \in L^2(\mathbb{R}) \\ (S_{\varepsilon}^{-} \varphi)(k) = \frac{\hat{\varphi}(k)}{\gamma_{\varepsilon}^{-}(k)} \quad \forall \hat{\varphi} \in L^2(\mathbb{R}) \end{array} \right.$$

En notant par ailleurs les correspondances :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\gamma_{\varepsilon}^{+}(k)} \xrightarrow{F^{-1}} (1+i) \frac{e^{ik_{\varepsilon}x}}{\sqrt{x}} 1_{]0,+\infty[} \in L_{loc}^1(\mathbb{R}) \\ \frac{1}{\gamma_{\varepsilon}^{-}(k)} \xrightarrow{F^{-1}} (1-i) \frac{e^{-ik_{\varepsilon}x}}{\sqrt{-x}} 1_{]-\infty,0]} \in L_{loc}^1(\mathbb{R}) \end{array} \right.$$

on peut donner une autre définition des opérateurs  $S_{\varepsilon}^{+}$  et  $S_{\varepsilon}^{-}$  par (si  $\varphi \in D(\mathbb{R})$  par exemple).

$$(1.37) \quad \left\{ \begin{array}{l} (S_{\varepsilon}^{+} \varphi)(x) = (1+i) \int_{-\infty}^x \frac{e^{ik_{\varepsilon}(x-y)}}{\sqrt{x-y}} \varphi(y) dy \\ (S_{\varepsilon}^{-} \varphi)(x) = (1-i) \int_x^{+\infty} \frac{e^{-ik_{\varepsilon}(x-y)}}{\sqrt{y-x}} \varphi(y) dy \end{array} \right.$$

Par ailleurs, remarquant que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{\varepsilon}^{+}(k) = \frac{(k - k_{\varepsilon})}{\gamma_{\varepsilon}^{+}(k)} \\ \gamma_{\varepsilon}^{-}(k) = \frac{(k + k_{\varepsilon})}{\gamma_{\varepsilon}^{-}(k)} \end{array} \right.$$

on en déduit que les opérateurs  $T_{\varepsilon}^{+}$  et  $T_{\varepsilon}^{-}$  sont reliés à  $S_{\varepsilon}^{+}$  et  $S_{\varepsilon}^{-}$  par :

$$(1.38) \quad \begin{cases} T_{\varepsilon}^{+} \varphi = \frac{1}{i} \frac{d}{dx} (S_{\varepsilon}^{+} \varphi) - k_{\varepsilon} S_{\varepsilon}^{+} \varphi \\ T_{\varepsilon}^{-} \varphi = \frac{1}{i} \frac{d}{dx} (S_{\varepsilon}^{-} \varphi) + k_{\varepsilon} S_{\varepsilon}^{-} \varphi \end{cases}$$

Enfin, les propriétés d'analyticité des fonctions  $\gamma_{\varepsilon}^{+}(z)$  et  $\gamma_{\varepsilon}^{-}(z)$ , que nous n'avons pas encore utilisées vont conférer aux opérateurs  $T_{\varepsilon}^{+}$ ,  $T_{\varepsilon}^{-}$ ,  $S_{\varepsilon}^{+}$  et  $S_{\varepsilon}^{-}$  des propriétés vis à vis des fonctions causales et anticausales qui se révéleront essentielles par la suite. Ce sont ces propriétés qui se substitueront à l'utilisation du théorème de Liouville.

Nous allons en fait énoncer et démontrer un résultat assez général qui concerne un opérateur  $A^{+}$  à symbole prolongeable analytiquement dans un demi plan complexe. Plus précisément, nous considérons un opérateur  $A^{+}$  tel que :

$$(1.39) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bullet A^{+} \in L(H^s(\mathbb{R}), H^{s-\alpha}(\mathbb{R})), s < \frac{1}{2}, \alpha \geq 0 \\ \bullet (A^{+} \varphi)(k) = \hat{A}^{+}(k) \hat{\varphi}(k) \\ \bullet \text{Le symbole } k \rightarrow \hat{A}(k) \text{ se prolonge en une fonction analytique dans le} \\ \text{demi-plan complexe } \{\text{Im } z \leq 0\} \text{ satisfaisant une majoration :} \\ \quad |\hat{A}^{+}(z)| \leq C(1 + |z|)^{+\alpha} \quad \alpha \geq 0 \end{array} \right.$$

Nous avons alors le :

Lemme 1.2 :

Si l'opérateur  $A^{+}$  satisfait les hypothèses (1.39) et si  $\varphi$  est à support dans  $\mathbb{R}^{+}$  alors  $A^{+}\varphi$  est également à support dans  $\mathbb{R}^{+}$ . Formellement  $A^{+}$  transforme une fonction causale en une fonction causale.

Démonstration du lemme :

Nous supposons tout d'abord que  $\varphi \in D(\mathbb{R}^{+})$ .

Sa transformée de Fourier  $\varphi(k)$  se prolonge en une fonction analytique par la formule :

$$\hat{\varphi}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-ixz} dx$$

qui dans le demi-plan  $\{\text{Im} z \leq 0\}$  satisfait une majoration du type :

$$\forall z / \text{Im} z \leq 0 \quad |\hat{\varphi}(z)| \leq \frac{C_n}{(1 + |z|)^n}$$

et ce pour tout entier  $n$ .

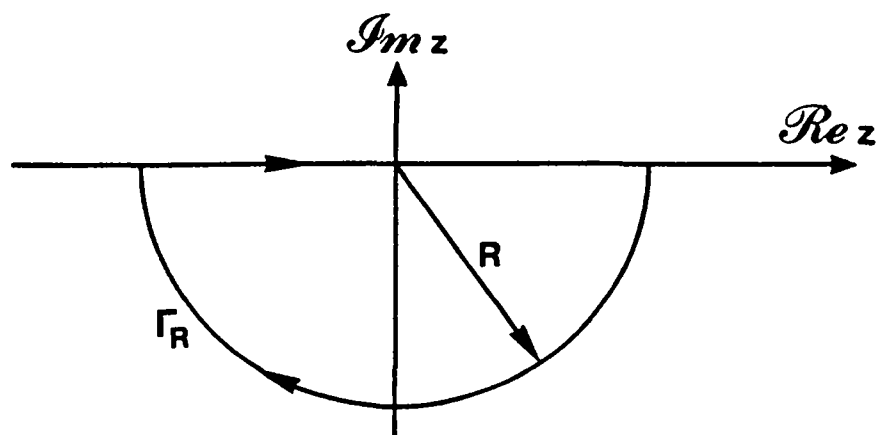
En particulier, la fonction  $k \rightarrow A(k) \hat{\varphi}(k)$  est dans  $L^1(\mathbb{R})$  de telle sorte que l'on a :

$$\begin{aligned} (A^+ \varphi)(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{A}^+(k) \hat{\varphi}(k) e^{ikx} dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^{+R} \hat{A}^+(k) \hat{\varphi}(k) e^{ikx} dk \end{aligned}$$

Soit, grâce à l'analyticité de  $A(z)$  et  $\varphi(z)$  :

$$(A^+ \varphi)(x) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Gamma_R} \hat{A}^+(z) \hat{\varphi}(z) e^{izx} dz$$

où  $\Gamma_R$  désigne le demi-cercle de rayon  $R$  inclus dans le demi-plan  $\{\text{Im} z \leq 0\}$  :



Considérons maintenant  $x < 0$  et paramétrons le demi-cercle  $\Gamma_R$  par  $z(\theta) = Re^{i\theta}$ , pour  $-\pi < \theta < 0$ .

Nous avons la majoration :

$$\left| \hat{A}^+(z(\theta)) \hat{\varphi}(z(\theta)) e^{iz(\theta)} \right| \leq \frac{C_n e^{-R|x| |\sin \theta|}}{(1+R)^{n-\alpha}}$$

Un rapide calcul montre alors que :

$$\left| \int_{\Gamma_R} \hat{A}^+(z) \hat{\varphi}(z) e^{iz} dx \right| \leq \frac{2C_n}{(1+R)^{n-\alpha}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2R}{\pi} |x|\theta} d\theta$$

$$= \frac{2C_n}{(1+R)^{n-\alpha}} \cdot \frac{1 - e^{-R|x|}}{2R|x|}$$

Si  $n+1 > \alpha$ , on voit par passage à la limite que :

$$(A^+\varphi)(x) = 0 \quad \text{pour } x < 0$$

Soit maintenant  $\varphi \in H^s(\mathbb{R})$  à support dans  $\mathbb{R}^+$ . Comme  $s < 1/2$ , un résultat de densité nous permet de construire une suite  $\varphi_p$  telle que :

$$\begin{cases} \varphi_p \rightarrow \varphi & \text{dans } H^s(\mathbb{R}) \\ \varphi_p \in D(\mathbb{R}^+) \end{cases}$$

Soit alors  $\Psi$  une fonction test dans  $D(\mathbb{R}^-)$  :

$$\langle A^+\varphi, \Psi \rangle = \lim_{p \rightarrow +\infty} \langle A^+\varphi_p, \Psi \rangle$$

par continuité de  $A$  dans  $H^s$  mais :

$$\langle A^+ \phi_p, \Psi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} A^+ \phi_p(x) \Psi(x) dx = 0$$

car  $A^+ \phi_p$  et  $\Psi$  sont de supports disjoints. Donc :

$$\langle A^+ \phi, \Psi \rangle = 0 \quad \forall \Psi \in D(\mathbb{R}^-) \Leftrightarrow \text{supp } A^+ \phi \subset \mathbb{R}^+ \quad \square.$$

Bien entendu, on aurait un résultat équivalent pour un opérateur  $A^-$  dont le symbole se prolongerait analytiquement au demi-plan  $\{\text{Im} z \geq 0\}$ .

En particulier, nous tirons de ce lemme le :

Corollaire 1.1. :

Les opérateurs  $T_\varepsilon^+$  et  $S_\varepsilon^+$  préservent la causalité des fonctions. Les opérateurs  $T_\varepsilon^-$  et  $S_\varepsilon^-$  préservent l'anticausalité des fonctions.

---

### c) Décomposition additive de Wiener Hopf dans $L^2(\mathbb{R})$

Soient  $\Pi^+$  et  $\Pi^-$  les deux projecteurs de  $L^2(\mathbb{R})$  dans lui-même définis par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Pi^+ \phi(x) = \phi(x) & \text{si } x > 0 \\ \Pi^+ \phi(x) = 0 & \text{si } x < 0 \end{array} \right.$$
  

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Pi^- \phi(x) = \phi(x) & \text{si } x < 0 \\ \Pi^- \phi(x) = 0 & \text{si } x > 0 \end{array} \right.$$

qui ne sont autres que les projecteurs orthogonaux sur les sous-espaces :

$$\left\{ \begin{array}{l} L^2(\mathbb{R}^+) = \{\varphi \in L^2(\mathbb{R}) / \varphi(x) = 0 \text{ pour } x < 0\} \\ \quad (\text{sous-espace des fonctions causales}) \\ \\ L^2(\mathbb{R}^-) = \{\varphi \in L^2(\mathbb{R}) / \varphi(x) = 0 \text{ pour } x > 0\} \\ \quad (\text{sous-espace des fonctions anticausales}) \end{array} \right.$$

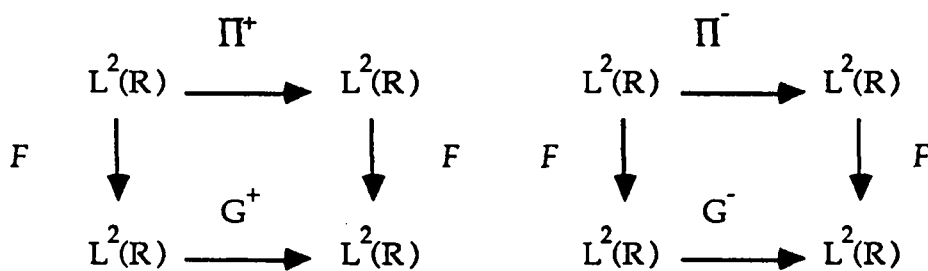
et nous avons donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} L^2(\mathbb{R}) = L^2(\mathbb{R}^+) \oplus L^2(\mathbb{R}^-) \\ I = \Pi^+ \oplus \Pi^- \\ \Pi^+ \Pi^- = \Pi^- \Pi^+ = 0 \end{array} \right.$$

Par transformation de Fourier, nous définissons deux nouveaux projecteurs orthogonaux, soient  $G^+$  et  $G^-$ , à l'aide des formules :

$$\left\{ \begin{array}{l} G^+ = F \circ \Pi^+ \circ F^{-1} \\ G^- = F \circ \Pi^- \circ F^{-1} \end{array} \right.$$

qui correspondent aux diagrammes :



$G^+$  et  $G^-$  ne sont autres que les projections orthogonales sur les sous-espaces  $F L^2(\mathbb{R}^+)$  et  $F L^2(\mathbb{R}^-)$ . On a :



$$\begin{cases} L^2(\mathbb{R}) = F L^2(\mathbb{R}^+) \oplus F L^2(\mathbb{R}^-) \\ I = G^+ \oplus G^- \\ G^+ G^- = G^- G^+ = 0 \end{cases}$$

Donc en particulier :

$$\begin{cases} \forall \hat{\phi}^- \in F L^2(\mathbb{R}^-) \quad G^+ \hat{\phi}^- = 0 \\ \forall \hat{\phi}^+ \in F L^2(\mathbb{R}^+) \quad G^- \hat{\phi}^+ = 0 \end{cases}$$

et par ailleurs :

$$\forall \phi \in L^2(\mathbb{R}) \quad \hat{\phi} = G^+ \hat{\phi} + G^- \hat{\phi}$$

qui n'est autre que l'équivalent dans  $L^2(\mathbb{R})$  de la décomposition additive de Wiener Hopf présentée en préambule, chaque terme de la décomposition étant cette fois obtenu par :

1. Transformation de Fourier directe
2. Troncature à un demi-espace
3. Transformation de Fourier inverse

Cette façon de définir les opérateurs  $G^+$  et  $G^-$  est celle qui s'introduit de la manière la plus naturelle pour la résolution de notre problème. Il est toutefois intéressant de donner une deuxième caractérisation des opérateurs  $G^+$  et  $G^-$  qui est particulièrement utile pour le calcul des solutions et l'étude de leur comportement asymptotique. C'est notamment l'équivalent « discret » de cette seconde caractérisation que nous utiliserons pour analyser les solutions approchées. De façon précise, cette deuxième caractérisation, pour l'opérateur  $G^+$  par exemple, s'applique au cas où :

- La fonction  $k \rightarrow \hat{\phi}(k)$  se prolonge analytiquement en une fonction  $\hat{\phi}(z)$  dans une bande du plan complexe  $\{| \operatorname{Im}(z) | \leq \eta\}$  ce qui est le cas des fonctions de l'espace  $W(\eta)$  formé des transformées de Fourier des fonctions de  $L^2(\mathbb{R})$  telles que :

$$|\phi(x)| \leq C e^{-\eta |x|}$$

Il est clair que, pour tout  $\eta$ , l'espace  $W(\eta)$  est dense dans  $L^2(\mathbb{R})$ . Nous avons alors le résultat classique suivant ([No]), dont nous donnons une démonstration simple :

### Théorème 1.2

Soit  $\varphi$  une fonction de  $W(\eta)$  et  $\sigma$  un réel strictement positif tel que  $\sigma < \eta$ , on a les formules :

$$(1.40) \quad (G^+ \varphi)(k) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty + i\sigma}^{+\infty + i\sigma} \frac{\hat{\varphi}(z)}{k - z} dz$$

$$(1.41) \quad (G^- \varphi)(k) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty - i\sigma}^{+\infty - i\sigma} \frac{\hat{\varphi}(z)}{k - z} dz$$

### Démonstration :

Faisons-là pour  $G^+$ . Nous avons par définition :

$$G^+ \hat{\varphi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} F^{-1}(\hat{\varphi})(y) e^{-iky} dy$$

Mais, compte tenu des propriétés d'analyticité et de décroissance de  $\varphi(z)$ , il vient :

$$(F^{-1} \hat{\varphi})(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty + i\sigma}^{+\infty + i\sigma} \hat{\varphi}(z) e^{iyz} dz$$

de telle sorte que :

$$G^+ \hat{\phi}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \left( \int_{-\infty + i\sigma}^{+\infty + i\sigma} \hat{\phi}(z) e^{iyz} dz \right) e^{-iky} dy$$

Compte tenu de signe de  $\sigma$ , la fonction  $y \rightarrow \exp iy(z - k)$  est sommable sur  $[0, +\infty[$ , pour  $z = \zeta + i\sigma$ , de telle sorte que nous pouvons appliquer le théorème de Fubini et obtenir :

$$G^+ \hat{\phi}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty + i\sigma}^{+\infty + i\sigma} \hat{\phi}(z) \left[ \int_0^{+\infty} e^{iy(z-k)} dy \right] dz$$

ce qui donne le résultat après avoir remarqué que :

$$\int_0^{+\infty} e^{iy(z-k)} dy = \frac{1}{i(k-z)}$$

On remarquera, à la lecture des formules (1.40) et (1.41), que l'égalité  $G^+ \phi + G^- \phi = \phi$  apparaît comme une conséquence de la formule intégrale de Cauchy. D'autre part, les opérateurs  $G^+$  et  $G^-$  sont reliés très simplement à la transformation de Hilbert, qui est l'opérateur unitaire dans  $L^2$  défini par :

$$(H\hat{\phi})(k) = \frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{\phi}(\zeta)}{k - \zeta} d\zeta \quad (\text{si } \hat{\phi} \in D)$$

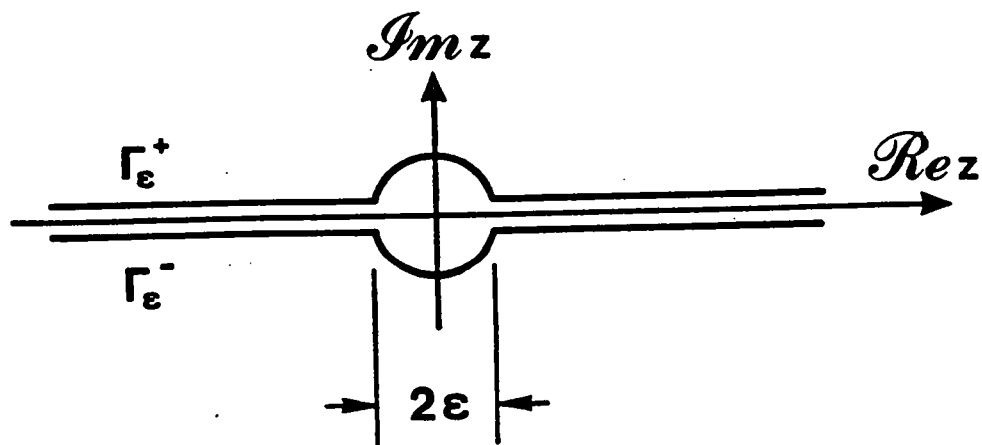
grâce aux formules :

$$\left| \begin{array}{l} G^+ \hat{\phi} = \frac{\hat{\phi}}{2} + \frac{i}{2} H\hat{\phi} \\ G^- \hat{\phi} = \frac{\hat{\phi}}{2} - \frac{i}{2} H\hat{\phi} \end{array} \right.$$

Il suffit de remarquer que, en utilisant le théorème de Cauchy, pour  $\varphi$  dans  $W(\eta)$  il vient :

$$\left| \begin{aligned} G^+ \hat{\varphi}(k) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\varepsilon^+} \frac{\hat{\varphi}(z)}{k-z} dk \\ G^- \hat{\varphi}(k) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\varepsilon^-} \frac{\hat{\varphi}(z)}{k-z} dk \end{aligned} \right.$$

où  $\Gamma_\varepsilon^+$  et  $\Gamma_\varepsilon^-$  sont les deux contours du plan complexe ci-dessous :



#### d) Ecriture et résolution d'une équation de Wiener-Hopf fonctionnelle

Nous partons de (1.31) que nous réécrivons :

$$(1.42) \quad \frac{1}{\gamma_\varepsilon(k)} \frac{d\hat{u}_\varepsilon}{dy}(k,0) + \gamma_\varepsilon^+(k) \hat{u}_\varepsilon(k,0) = 0$$

ou encore, sous forme opérationnelle :

$$(1.43) \quad S_{\varepsilon}^{-} \left( \gamma_0 \frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial y} \right) + T_{\varepsilon}^{+} (\gamma_0 u^{\varepsilon}) = 0$$

les deux égalités (1.42) et (1.43) étant à prendre au sens de  $L^2(\mathbb{R})$ .

Nous faisons maintenant la décomposition additive de la fonction

$$k \rightarrow \frac{1}{\gamma_{\varepsilon}(k)} \frac{d\hat{u}_{\varepsilon}}{dy}(k,0) \text{ sous la forme :}$$

$$\frac{\hat{v}_{\varepsilon}(k,0)}{\gamma_{\varepsilon}(k)} = G^{+} \left( \frac{\hat{v}_{\varepsilon}}{\gamma_{\varepsilon}} \right) (k) + G^{-} \left( \frac{\hat{v}_{\varepsilon}}{\gamma_{\varepsilon}} \right) (k)$$

où nous avons posé, pour simplifier :

$$\begin{cases} v_{\varepsilon}(x,y) = \frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial y}(x,y) \\ \hat{v}_{\varepsilon}(k,0) = \frac{d\hat{u}_{\varepsilon}}{dy}(k,0) \end{cases}$$

Nous obtenons ainsi :

$$(1.44) \quad G^{+} \left( \frac{\hat{v}_{\varepsilon}}{\gamma_{\varepsilon}} \right) (k) + G^{-} \left( \frac{\hat{v}_{\varepsilon}}{\gamma_{\varepsilon}} \right) (k) + \gamma_{\varepsilon}^{+}(k) \hat{u}_{\varepsilon}(k,0) = 0$$

soit l'équation de Wiener-Hopf fonctionnelle :

$$(1.45) \quad (\Pi^{+} \circ S_{\varepsilon}^{-}) (\gamma_0 v_{\varepsilon}) + (\Pi^{-} \circ S_{\varepsilon}^{-}) (\gamma_0 v_{\varepsilon}) + T_{\varepsilon}^{+} (\gamma_0 u_{\varepsilon}) = 0$$

(1.44) ou (1.45) n'est autre que l'équation linéaire reliant  $\gamma_0 u^{\varepsilon}$  et  $\gamma_0 v_{\varepsilon}$  sachant que l'équation d'Helmholtz (1.30) est satisfaite. Nous n'avons pas jusqu'ici utilisé les conditions aux limites. Il s'agit de trouver l'unique solution  $(\gamma_0 u_{\varepsilon}, \gamma_0 v_{\varepsilon})$  de (1.45) qui satisfasse en outre :

$$(1.46) \quad \begin{cases} \gamma_0 u_\varepsilon|_{R^+} = 0 & \text{dans } H^{1/2}(R^+) \\ \gamma_0 v_\varepsilon|_{R^+} = -g & \text{dans } H^{-1/2}(R^+) \end{cases}$$

On a alors bien évidemment l'équivalence :

$$u_\varepsilon \text{ solution du problème (1.14)}$$

$$(1.47) \quad \Leftrightarrow$$

$$\left( \gamma_0 u_\varepsilon, \gamma_0 \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y} \right) \text{ solution de (1.45) , (1.46)}$$

$$u_\varepsilon = R_\varepsilon \gamma_0 u_\varepsilon$$

ce qui montre d'ailleurs que le problème :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } (\gamma_0 u_\varepsilon, \gamma_0 v_\varepsilon) \in H^{1/2}(R) \times H^{-1/2}(R) \\ &\text{solution de (1.45) et (1.46)} \end{aligned}$$

admet une solution unique. Nous avons donc ramené la résolution du problème (1.14) à celle de ce problème.

Pour énoncer le résultat, il est utile d'introduire l'opérateur  $P$  de prolongement par 0 défini de façon précise par :

$$\begin{array}{l|l} P: H^{-1/2}(\Gamma) & \longrightarrow H^{-1/2}(R) \\ \varphi & \longrightarrow P\varphi \\ \hline \forall \psi \in H^{1/2}(R) & \langle P\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, \Pi^+ \psi \rangle_\Gamma \end{array}$$

(où  $\Pi^+$  désigne l'opérateur de restriction défini précédemment dans  $L^2(R)$  et qui

applique  $H^{1/2}(\mathbb{R})$  dans  $H^{1/2}(\Gamma)$ ). Nous poserons :

$$g(k) = F(Pg)(k) \in F H^{1/2}(\mathbb{R})$$

Nous allons montrer que, conformément aux calculs formels menés en préambule, l'unique solution de (1.45) qui satisfait à (1.46) est donnée par :

$$(1.48) \quad \begin{cases} \hat{u}_\varepsilon(k,0) = \frac{1}{\gamma_\varepsilon^+} G^+ \left( \frac{\hat{g}}{\gamma_\varepsilon^-} \right) (k) \\ \hat{v}_\varepsilon(k,0) = -\gamma_\varepsilon^- G^+ \left( \frac{\hat{g}}{\gamma_\varepsilon^-} \right) (k) \end{cases}$$

ce que nous pouvons énoncer de la manière suivante (ce théorème est le théorème clé du chapitre) :

### Théorème 1.3

L'unique solution de  $(\gamma_0 u_\varepsilon, \gamma_0 v_\varepsilon)$  dans  $H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$  de l'équation fonctionnelle (1.45) qui satisfait les conditions (1.46) est donnée par :

$$(1.49) \quad \begin{cases} \gamma_0 u_\varepsilon = (S_\varepsilon^+ \circ \Pi^+ \circ S_\varepsilon^-) Pg \\ \gamma_0 v_\varepsilon = - (T_\varepsilon^- \circ \Pi^+ \circ S_\varepsilon^-) Pg \end{cases}$$

de plus, l'application  $g \rightarrow (\gamma_0 u^\varepsilon, \gamma_0 v^\varepsilon)$  est linéaire et continue de  $H^{-1/2}(\Gamma)$  dans  $H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ .

### Démonstration du théorème :

Notons tout d'abord qu'il est immédiat de vérifier que l'équation fonctionnelle (1.45) est satisfaite par le couple  $(\gamma_0 u^\varepsilon, \gamma_0 v^\varepsilon)$  donné par (1.49). Il reste à vérifier les conditions de (1.46), on obtiendra ainsi une solution du problème (1.14) à l'aide de l'opérateur de relèvement  $R^\varepsilon$  ; comme cette solution est unique le problème sera résolu.

La première condition  $\gamma_0 u^\varepsilon|_{R^+} = 0$  signifie simplement que  $\gamma_0 u^\varepsilon$  est dans  $H^{1/2}(R) \cap L^2(R^+)$ .

$$\gamma_0 u^\varepsilon|_{R^+} = 0 \Leftrightarrow \gamma_0 u^\varepsilon \in L^2(R^+)$$

Mais  $\gamma_0 u^\varepsilon = S_\varepsilon^+(\Pi^+ S_\varepsilon^- Pg)$  donc, comme  $\Pi^+ S_\varepsilon^- Pg$  est dans  $L^2(R^+)$ , d'après le corollaire 1.1 on a bien  $\gamma_0 u^\varepsilon \in L^2(R^+) \cap H^{1/2}(R)$ .

Il reste à vérifier la condition  $\gamma_0 v^\varepsilon|_{R^+} = -g$ , c'est-à-dire que :

$$\forall \varphi \in D(\Gamma) \quad \langle \gamma_0 v^\varepsilon, \varphi \rangle = -\langle g, \varphi \rangle$$

Tout d'abord, donnons l'idée du raisonnement. Si  $\gamma_0 v^\varepsilon$  et  $Pg$  étaient, ce qui n'est pas le cas, élément de  $L^2(R)$ , il s'agirait de montrer que  $\Pi^+(\gamma_0 v^\varepsilon) = -Pg$ .

Or formellement :

$$\Pi^+(\gamma_0 v^\varepsilon) = -(\Pi^+ \circ T_\varepsilon^-)(\Pi^+ \circ S_\varepsilon^-) Pg$$

Mais par ailleurs, comme  $\Pi^+ = I - \Pi^-$  :

$$(\Pi^+ \circ S_\varepsilon^-)(Pg) = S_\varepsilon^-(Pg) - \Pi^- \circ S_\varepsilon^-(Pg)$$

Donc :

$$\Pi^+(\gamma_0 v^\varepsilon) = -\Pi^+(T_\varepsilon^- \circ S_\varepsilon^-) Pg + \Pi^+ \circ (T_\varepsilon^- (\Pi^- \circ S_\varepsilon^-) Pg)$$

Nous utilisons alors le fait que, formellement :

$$\begin{cases} T_\varepsilon^- \circ S_\varepsilon^- = I \\ \Pi^+(Pg) = Pg \end{cases}$$

pour obtenir :

$$\Pi^+(\gamma_0 v^\varepsilon) = -Pg + \Pi^+(T_\varepsilon^-(\Pi^- \circ S_\varepsilon^-) Pg)$$



Il suffit alors de remarquer que :

$$\begin{aligned} & (\Pi^- \circ S_\varepsilon^-)Pg \text{ est à support dans } R^- \\ \Rightarrow T_\varepsilon^-(\Pi^- \circ S_\varepsilon^-)Pg & \text{ est à support dans } R^- \text{ (Lemme 1.1)} \\ \Rightarrow \Pi^+(T_\varepsilon^-(\Pi^- \circ S_\varepsilon^-)Pg) = 0 & \Rightarrow \Pi^+(\gamma_0 v_\varepsilon) = -Pg. \end{aligned}$$

Cette démonstration n'est toutefois pas valable du fait que  $Pg$  et  $\gamma_0 v^\varepsilon$  étant seulement des éléments de  $H^{-1/2}(R)$ , leur image par  $\Pi^+$  ou  $\Pi^-$  n'a pas de sens. Pour aboutir au résultat, nous allons devoir procéder par régularisation, densité et continuité. Nous décomposons notre démonstration en deux étapes :

(i) Obtention du résultat lorsque  $g$  est dans  $L^2(\Gamma)$

Nous introduisons l'opérateur «régularisant»  $J_p^-$  de  $H^{-1/2}(R)$  dans  $H^{1/2}(R)$  défini par :

$$(J_p^- \varphi)(k) = \left(1 + \frac{ik}{p}\right)^{-1} \hat{\varphi}(k)$$

Bien entendu,  $J_p^-$  est une approximation régularisante de l'identité dans  $H^{-1/2}(R)$  dont le symbole  $\left(1 + i \frac{k}{p}\right)^{-1}$  se prolonge analytiquement dans le demi-plan  $\{\text{Im} z \geq 0\}$ .

Posons alors :

$$(1.50) \quad (\gamma_0 v^\varepsilon)_p = J_p^- (\gamma_0 v^\varepsilon) \in H^{1/2}(R)$$

Nous avons :

$$(\gamma_0 v^\varepsilon)_p = J_p^-(T_\varepsilon^- \Pi^+ S_\varepsilon^-)Pg$$

soit en écrivant que  $\Pi^+(S_\varepsilon^- Pg) = S_\varepsilon^- Pg - \Pi^-(S_\varepsilon^- Pg)$  :

$$(\gamma_0 v^\varepsilon)_p = J_p^-(Pg) + (J_p^- \circ T_\varepsilon^-) (\Pi^- S_\varepsilon^- Pg)$$

Nous pouvons alors appliquer le lemme 1.1 à l'opérateur  $J_p^- \circ T_\varepsilon^-$  ; on a :

$$(J_p^- \circ T_\varepsilon^-) (\Pi^- S_\varepsilon^- P g) \in H^{1/2}(R) \cap L^2(R)$$

On en déduit que :

$$\Pi^+ (\gamma_0 v^\varepsilon)_p = -\Pi^+ (J_p^- P g)$$

Or  $J_p^- P g \rightarrow P g$  dans  $L^2(R^+)$  et comme  $\Pi^+ P g = P g$  ; il vient :

$$(1.51) \quad \Pi^+ (\gamma_0 v^\varepsilon)_p \rightarrow -P g \text{ dans } L^2(R)$$

Mais, par ailleurs, nous savons que :

$$(\gamma_0 v^\varepsilon)_p \rightarrow \gamma_0 v^\varepsilon \text{ dans } H^{-1/2}(R)$$

Soit alors  $\psi$  une fonction test de  $D(R^+)$ , il vient :

$$\begin{aligned} \left| \begin{aligned} \langle \gamma_0 v^\varepsilon, \psi \rangle &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \langle (\gamma_0 v^\varepsilon)_p, \psi \rangle && \text{d'après (1.50)} \\ &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} (\gamma_0 v^\varepsilon)_p(x) \psi(x) dx \\ &= \int_0^{+\infty} g(x) \psi(x) dx && \text{d'après (1.51)} \\ &= -\langle P g, \psi \rangle \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Ce qui montre effectivement que :

$$\gamma_0 v^\varepsilon|_{R^+} = -g$$

(ii) Obtention du résultat dans le cas général  $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$

Il suffit d'établir que l'application :

$$(1.52) \quad g \rightarrow ((S_\varepsilon^+ \circ \Pi^+ \circ S_\varepsilon^-) Pg, -(T_\varepsilon^- \circ \Pi^+ \circ S_\varepsilon^-) Pg)$$

est continue de  $H^{-1/2}(\Gamma)$  dans  $H^{1/2}(R) \times H^{-1/2}(R)$  puisque l'on sait déjà que l'application définie par  $g \rightarrow (\gamma_0 u^\varepsilon, \gamma_0 \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial y})$ , où  $u^\varepsilon$  est la solution du problème (1.14) est, d'après le théorème 1.1, continue. Par ailleurs, elle coïncide, d'après l'équivalence (1.47) et le point (i), avec l'application (1.52) sur  $L^2(\Gamma)$  qui est un ensemble dense de  $H^{-1/2}(\Gamma)$ . Or la continuité de (1.52) est évidente d'après les propriétés des opérateurs  $T_\varepsilon^-$ ,  $S_\varepsilon^-$  et  $S_\varepsilon^+$ . Ceci achève la démonstration.  $\square$ .

L'utilisation du relèvement  $R_\varepsilon$  nous permet bien sûr d'obtenir le résultat suivant :

#### Corollaire 1.2

La solution unique du problème (1.14) est donnée par :

$$u^\varepsilon = R_\varepsilon (S_\varepsilon^+ \circ \Pi^+ \circ S_\varepsilon^-) Pg$$

Les résultats des théorèmes 1.2 et du corollaire 1.2 apportent une solution théorique, mais un peu abstraite, à notre problème. Nous allons maintenant donner une expression calculable dans le cas de données  $g$  assez régulières. Pour cela nous supposerons maintenant que, pour  $\eta > 0$  :

$$(1.52) \quad g(x) \leq Ce^{-\eta|x|}$$

e) Expressions pour le calcul de la trace de la solution  $u_\varepsilon$  le long de la fissure :

### Théorème

Si  $g$  satisfait l'hypothèse (1.52), la solution  $u_\varepsilon$  sur la fissure est donnée par l'une des deux expressions équivalentes suivantes :

$$(1.53) \quad \hat{u}_\varepsilon(k,0) = \frac{1}{2i\pi\gamma_\varepsilon^+(k)} \int_{-\infty+i0}^{+\infty+i0} \frac{\hat{g}(z)}{\gamma_\varepsilon^-(z)(k-z)} dz$$

$$(1.54) \quad u_\varepsilon(x,0) = \int_0^{+\infty} K_\varepsilon(x,y) g(y) dy$$

où le noyau  $K_\varepsilon$  est défini par :

$$K_\varepsilon(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\min(x,y)} \frac{e^{ik_\varepsilon(x-\xi)} e^{ik_\varepsilon(y-\xi)}}{\sqrt{x-\xi} \sqrt{y-\xi}} d\xi$$

### Démonstration :

Le point (i) est une conséquence du théorème et le point (ii) est une conséquence des caractérisations des opérateurs  $S_\varepsilon^+$  et  $S_\varepsilon^-$  en termes de produits de convolution.

f) Expressions de la solution  $u_\varepsilon$  dans le demi-espace :

Connaissant  $u_\varepsilon(x,0)$  à l'aide du théorème on en déduit deux expressions possibles de  $u_\varepsilon$  dans tout l'espace :

$$(1.55) \quad \hat{u}_\varepsilon(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}_\varepsilon(k,0) e^{-\gamma_\varepsilon(k)y} e^{ikx} dk$$

$$(1.56) \quad u_{\varepsilon}(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_{\varepsilon}(x-\xi,y) u_{\varepsilon}(\xi,0) d\xi$$

où le noyau  $G_{\varepsilon}$  est donné par : (cf. [Ac] page 286)

$$G_{\varepsilon}(x,y) = \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ H_0^{(2)} \left( k_{\varepsilon} \sqrt{x+y} \right) \right\}$$

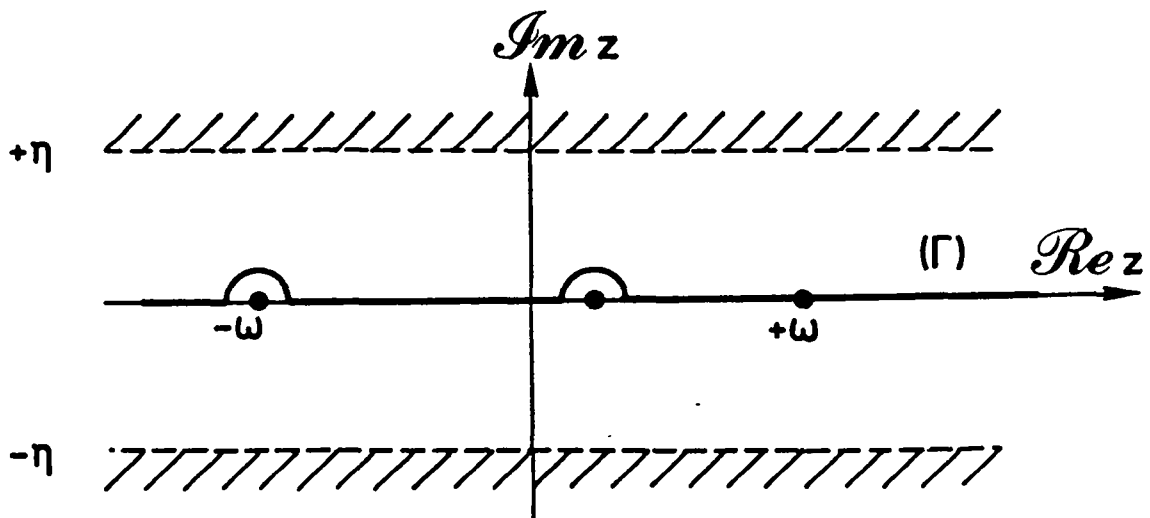
#### 1.4. Calcul de la solution sortante par absorption limite

Nous ne donnons le résultat que dans le cas d'une fonction  $g$  suffisamment régulière satisfaisant l'hypothèse (1.52). Alors les passages à la limite formels sont parfaitement justifiés et il est aisé d'aboutir au résultat que nous allons maintenant décrire.

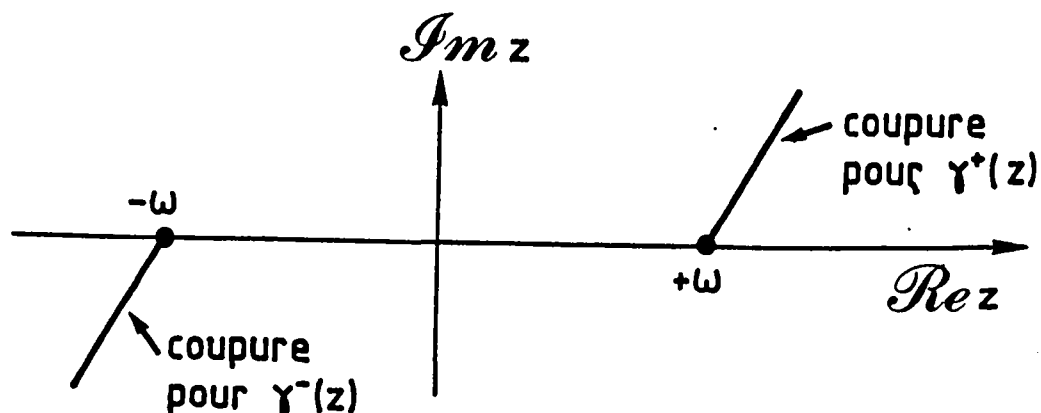
Lorsque  $g$  est suffisamment régulière et satisfait l'hypothèse de décroissance (1.52) la solution sortante du problème est donnée, sur l'axe de la fissure, par l'intermédiaire de sa transformée de Fourier, après passage à la limite à l'aide de la formule :

$$(1.57) \quad \hat{u}(k,0) = \frac{1}{2i\pi\gamma_+(k)} \int_{\Gamma} \frac{\hat{g}(z)}{\gamma_-(z)(k-z)} dz$$

où  $\Gamma$  désigne le contour du plan complexe ci-dessous :



et où les fonctions  $\gamma^+(z)$  et  $\gamma^-(z)$  sont définies comme étant les racines respectives de  $(z - \omega)$  et  $(z + \omega)$  associées aux coupures du plan complexe ci-dessous.



En partant de la formule (1.57), on obtient une expression directe de la solution sur la fissure :

$$(1.58) \quad u(x,0) = \int_0^{+\infty} K(x,y) g(y) dy$$

où le noyau  $K(x,y)$  est donné par :

$$K(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\min(x,y)} \frac{e^{i\omega(x-\xi)} e^{i\omega(y-\xi)}}{\sqrt{x-\xi} \sqrt{y-\xi}} d\xi$$

Connaissant la solution  $u(x,0)$  on calcule alors la solution dans tout l'espace, alternativement par l'une des formules :

$$(1.59) \quad u(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(k,0) e^{-\gamma(k)y} e^{ikx} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}}$$

avec

$$\begin{cases} \gamma(k) = (k^2 - \omega^2)^{1/2} & \text{si } k > \omega \\ = i(\omega^2 - k^2)^{1/2} & \text{si } k < \omega \end{cases}$$

ou bien

$$(1.60) \quad u(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x - \xi, y) u(\xi, 0) d\xi$$

où le noyau  $G(x,y)$  est donné par :

$$G(x,y) = \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial y} \{ H_0^{(2)}(\omega \sqrt{x+y}) \}$$

## 1.5. Etude du cas de la diffraction d'une onde plane

### 1.5.1. Calcul de l'onde diffractée

Nous supposons dans ce paragraphe que l'onde incidente est une onde plane dont la direction de propagation fait un angle  $\theta$  avec la direction de la fissure. Ceci correspond à prendre comme donnée de Neumann sur la fissure la fonction :

$$(1.61) \quad g(x) = -i\omega \sin \theta \exp i\omega (x \cos \theta)$$

D'un point de vue purement théorique, il existe une difficulté technique due au fait que la fonction  $g(x)$  donnée par (1.61) ne satisfait pas les hypothèses pour lesquelles les résultats des sections (1.3) et (1.4) ont été établis. C'est pourquoi il convient, pour définir l'onde diffractée associée à l'onde plane de procéder en plusieurs étapes :

(i) On approche  $g(x)$  par la suite  $g_\eta(x)$  définie par :

$$g_\eta(x) = -i\omega \sin \theta \exp i\omega x \cos \theta \cdot e^{-\eta x}$$

(ii) On calcule la solution approchée  $u_\eta(x,y)$  puis on passe à la limite quand  $\eta$  tend vers 0.

Pour calculer la solution approchée  $u_\eta$ , nous allons utiliser les résultats obtenus au paragraphe précédent. En effet, la donnée  $g_\eta$  satisfait (1.52), nous pouvons appliquer la formule (1.57), ce qui, compte tenu de :

$$(1.62) \quad \hat{g}_\eta(z) = \frac{-i\omega \sin \theta}{\sqrt{2\pi}(z - z_\eta)} , \quad z_\eta = \omega \cos \theta + i\eta$$

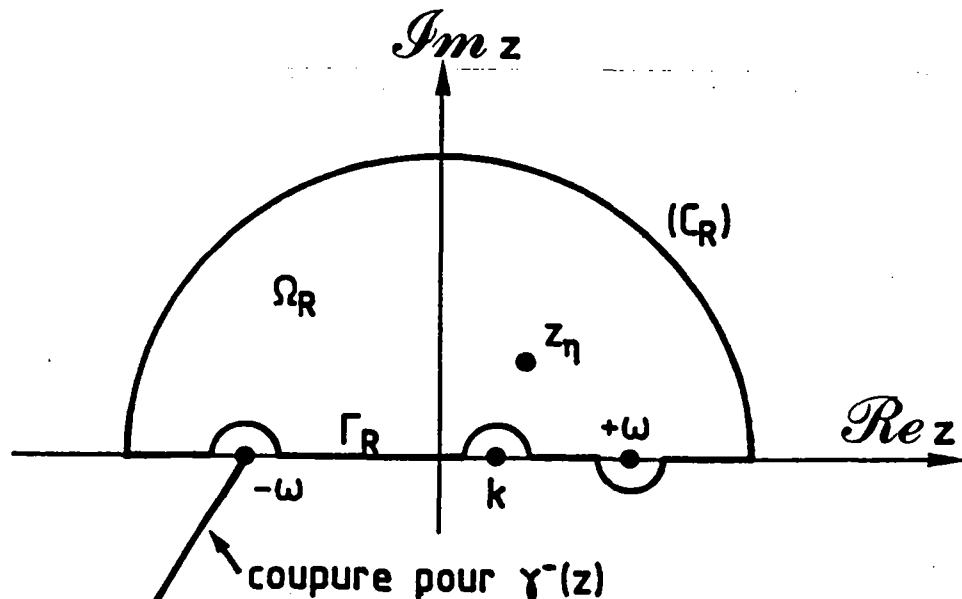
nous donne simplement :

$$(1.63) \quad \hat{u}_\eta(k,0) = \frac{-i\omega \sin \theta}{(2\pi)^{3/2} \gamma^+(k)} \int_{(\Gamma)} \frac{dz}{(z - z_\eta)(k - z) \gamma^-(z)}$$

où  $(\Gamma)$  est le contour déjà défini au paragraphe 1.4. Nous pouvons écrire que, si  $\Gamma_R = \{z \in \Gamma ; |z| \leq R\}$  :

$$\hat{u}_\eta(k,0) = \frac{-i\omega \sin \theta}{(2\pi)^{3/2} \gamma^+(k)} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} \frac{dz}{(z - z_\eta)(k - z) \gamma^-(z)}$$

Nous introduisons maintenant  $(C_R)$ , le demi-cercle de centre O et de rayon R, inclus dans le demi-plan  $\text{Im} z > 0$  et  $\Omega_R$  l'ouvert de  $\mathbb{C}$  délimité par  $(\Gamma_R) \cup (C_R)$  :





Il est facile de voir que  $\psi(z) = \{\gamma(z)(z - z_\eta)\} (k - z)^{-1}$  est méromorphe dans  $\Omega_R$ , son unique pôle étant  $z_\eta$ . Par ailleurs, il est clair que :

$$\lim_{R \rightarrow 0} \left( \int_{C_R} \psi(z) dz \right) = 0$$

Par conséquent, par application du théorème des résidus, il vient immédiatement :

$$(1.64) \quad \hat{u}_\eta(k, 0) = \frac{-i\omega \sin \theta}{(2\pi)^{3/2} \gamma^+(k)} \cdot 2i\pi \operatorname{Res}(\psi; z_\eta)$$

Comme :

$$\operatorname{Res}(\psi; z_\eta) = \frac{1}{\gamma^-(z_\eta)} \cdot \frac{1}{(k - z_\eta)}$$

On a :

$$(1.65) \quad \hat{u}_\eta(k, 0) = - \frac{\omega \sin \theta}{\sqrt{2\pi} \gamma^+(k)} \cdot \frac{1}{\gamma^-(z_\eta) (z_\eta - k)}$$

Soit encore :

$$(1.66) \quad \hat{u}_\eta(k, 0) = - \frac{\omega \sin \theta}{\sqrt{2\pi} (k - \omega)^{1/2} (\omega \cos \theta + i\eta + \omega)^{1/2}} \cdot \frac{1}{(\omega \cos \theta + i\eta - k)}$$

La solution est donc donnée par :

$$(1.67) \quad \hat{u}_\eta(k, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\omega \sin \theta}{(\omega(1 + \cos \theta) + i\eta)^{1/2}} \frac{e^{-(k^2 - \omega^2)^{1/2} y}}{(k - \omega)^{1/2} (k - \omega \cos \theta - i\eta)}$$

où nous avons supposé implicitement, pour  $\lambda \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{cases} \lambda^{1/2} = \sqrt{\lambda} & \text{si } \lambda > 0 \\ \lambda^{1/2} = -i\sqrt{-\lambda} & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}$$

Par suite, par transformation de Fourier inverse, il vient :

$$(1.68) \quad u_{\eta}(x,y) = \frac{1}{2\pi} \frac{\omega \sin \theta}{(\omega(1 + \cos \theta) + i\eta)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(kx + i(k^2 - \omega^2)^{1/2}y)}}{(k-\omega)^{1/2} (k - \omega \cos \theta - i\eta)} dk$$

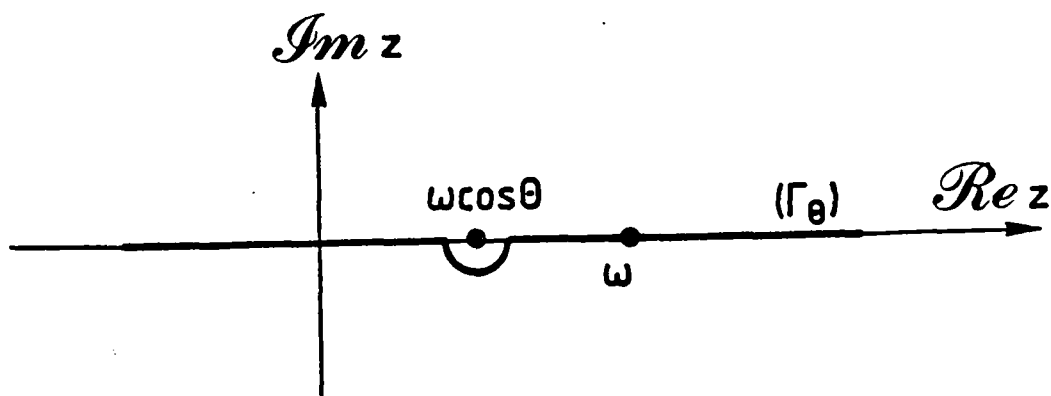
Le passage à la limite quand  $\eta$  tend vers 0 peut se faire de deux manières différentes. D'abord en utilisant le fait que la fonction  $k \rightarrow (k - k_0 i\eta)^{-1}$  converge vers (cf. [Da]) :

$$\text{v. p.} \cdot \left( \frac{1}{k - k_0} \right) - i\pi \delta(k - k_0)$$

On obtient alors aisément le résultat suivant :

$$(1.69) \quad \left| \begin{aligned} u_D(x,y) &= \frac{1}{2} e^{i\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} + \\ &+ \frac{\sqrt{2} \omega^{1/2}}{2\pi} \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(kx + i(k^2 - \omega^2)^{1/2}y)}}{(k - \omega)^{1/2} (k - \omega \cos \theta)} dk \end{aligned} \right.$$

On obtient une autre expression de  $u_D(x,y)$  en interprétant (1.68) comme une intégrale dans le plan complexe le long de l'axe réel. On peut alors déformer le contour, en un autre contour ( $\Gamma_{\theta}$ ) comme indiqué ci-dessous :



( $\omega \cos \theta$  est la limite de  $\omega \cos \theta + i\eta$  lorsque  $\eta \rightarrow 0$ )

Ce contour étant fixé, on peut alors passer à la limite à l'aide du théorème de Lebesgue et ainsi obtenir :

$$(1.70) \quad u_D(x,y) = \frac{-(\omega \cos \theta - \omega)^{1/2}}{2i\pi} \int_{\Gamma_\theta} \frac{e^{iz} e^{-(z^2 - \omega^2)y}}{(z - \omega)^{1/2} (z - \omega \cos \theta)} dz$$

C'est en fait une expression du même type que nous obtiendrons pour la solution approchée  $u_D^h(x,y)$ . Une telle expression est particulièrement utile dans la mesure où :

- (i) Elle permet d'étudier le comportement asymptotique de la solution lorsque  $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$  tend vers  $+\infty$  à partir d'arguments de type phase stationnaire. C'est cette analyse asymptotique qui sera menée au chapitre pour l'étude de la solution discrète.
- (ii) C'est à partir de cette expression que l'on peut démontrer à l'aide du «changement de variable» complexe  $z = \cos(\theta + it)$ ,  $t \in \mathbb{C}$ , que cette solution s'exprime de façon simple avec la fonction de Fresnel. Nous renvoyons le lecteur à ([No]) pour les détails du calcul et nous contentons de donner le résultat (déjà donné en introduction) :

$$u_T(r \cos \Theta, r \sin \Theta) = \frac{e^{i\left(\omega r - \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{\pi}} \left\{ F\left(\sqrt{2\omega r} \sin\left(\frac{\theta - \Theta}{2}\right)\right) + F\left(\sqrt{2\omega r} \sin\left(\frac{\theta + \Theta}{2}\right)\right) \right\}$$

$$\text{Avec } F(x) = e^{-ix^2} \int_x^{+\infty} e^{iu^2} du, x \in \mathbb{R}$$

### 1.5.2. Quelques remarques instructives

#### (i) Obtention directe des formules (1.69) et (1.70) :

Nous avons choisi de calculer la solution  $u_\eta(x,y)$  en appliquant les résultats généraux que nous avons obtenus au paragraphe (1.4) pour une fonction  $g(x)$  quelconque. On peut en fait «court-circuiter» d'une certaine manière l'utilisation de ces formules, en revenant au calcul de la solution amortie  $u_{\eta,\varepsilon}$ . En fait nous savons (cf. théorème 1.2) que :

$$\hat{u}_{\eta,\varepsilon}(k) = \frac{1}{\gamma_\varepsilon^+(k)} G^+ \left( \frac{\hat{g}_\eta(k)}{\gamma_\varepsilon^-(k)} \right)$$

Dans le cas de l'onde plane, le calcul de  $G^+ \left( \frac{\hat{g}_\eta(k)}{\gamma_\varepsilon^-(k)} \right)$  peut se mener sans faire

appel à l'expression intégrale obtenue au théorème 1.1.

En effet, nous pouvons écrire :

$$(1.72) \quad \frac{\hat{g}_\eta(z)}{\gamma_\varepsilon^-(z)} = \left( \frac{1}{\gamma_\varepsilon^-(z)} - \frac{1}{\gamma_\varepsilon^-(z_\eta)} \right) \hat{g}_\eta(z) + \frac{\hat{g}_\eta(z)}{\gamma_\varepsilon^-(z_\eta)}$$

Il suffit alors de remarquer que, comme  $z_\eta$  est l'unique pôle de  $g_\eta(z)$  et est situé dans le demi-plan  $\text{Im}(z) > \eta$ , on a, avec  $\beta > 0$  :

- $\left( \frac{1}{\gamma_\varepsilon(z)} - \frac{1}{\gamma_\varepsilon(z_\eta)} \right) \hat{g}_\eta(z)$  est analytique dans  $\{\text{Im } z < \beta\}$
- $\frac{\hat{g}_\eta(z)}{\gamma_\varepsilon(z_\eta)}$  est analytique dans  $\{\text{Im } z < \beta\}$

Autrement dit (1.72) n'est autre qu'une décomposition de Wiener Hopf

additive de  $\frac{\hat{g}_\eta(z)}{\gamma_\varepsilon(z)}$  qui satisfait en outre les propriétés requises de décroissance

à l'infini. On en déduit aisément que :

$$G^+ \left( \frac{\hat{g}_\eta(k)}{\gamma_\varepsilon(k)} \right) = \frac{1}{\gamma_\varepsilon(z_\eta)} \hat{g}_\eta(z)$$

Par conséquent, nous en déduisons :

$$\hat{u}_{\eta,\varepsilon}(k) = \frac{\hat{g}_\eta(k)}{\gamma_\varepsilon^+(k) \gamma_\varepsilon^-(z_\eta)}$$

soit encore, après passage à la limite quand  $\varepsilon$  tend vers 0 :

$$\hat{u}_\eta(k) = \frac{\hat{g}_\eta(k)}{\gamma^+(k) \gamma^-(z_\eta)}$$

Nous avons ainsi retrouvé directement la formule (1.65) puisque

$$g_{\eta}(k) = \frac{-i \omega \sin \theta}{\sqrt{2\pi} (k - z_{\eta})}.$$

(ii) Vérification a posteriori que la fonction  $u_D$  donnée par (1.69) ou (1.70) est bien solution du problème.

Il est instructif de travailler, au moins formellement, sur l'expression (1.70) pour vérifier que la fonction  $u_D$  est bien solution du problème.

Posons :

$$(1.73) \quad \begin{cases} \gamma(k) = \gamma^+(k) \gamma^-(k) \\ \gamma(k) = (k^2 - \omega^2)^{1/2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (k^2 - (\omega + i\varepsilon)^2)^{1/2} \end{cases}$$

on a, en posant  $k_x = \omega \cos \theta$  :

$$(1.74) \quad u_D(x,y) = - \frac{\gamma^+(k_x)}{2i\pi} \int_{\Gamma_{\theta}} \frac{\exp ikx - \gamma(k) y}{\gamma^+(k) (k - k_x)} dk$$

D'après ce qui précède, cette fonction satisfait 3 conditions que nous allons vérifier maintenant.

a) Conditions au points  $(x,y)$  intérieurs à  $R^2_+$  :

Formellement, l'égalité :

$$(\omega^2 + \Delta) u_D(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in \Omega$$

est vérifiée, parce que l'exponentielle intervenant dans l'intégrande satisfait :

$$(\omega^2 + \Delta) \exp (i k x - \gamma(k) y) = 0 \quad \text{pour tout } k$$

b) Condition en  $(x,0)$  pour  $x < 0$

On a :

$$(1.75) \quad u_D(x,0) = -\frac{\gamma^+(k_x)}{2i\pi} \int_{\Gamma_\theta} \frac{\exp ikx dk}{\gamma^+(k)(k - k_x)}$$

On remarque que cette expression ne fait pas intervenir  $\gamma(k)$  ; on peut donc déformer le contour dans le demi-plan inférieur :

$$(1.76) \quad u_D(x,0) = -\frac{\gamma^+(k_x)}{2i\pi} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R^-} \frac{\exp izx}{\gamma^+(z)(z - k_x)} dz$$

Supposons  $x < 0$ , on a :

$|\exp izx| < 1$  dans ce demi-plan.

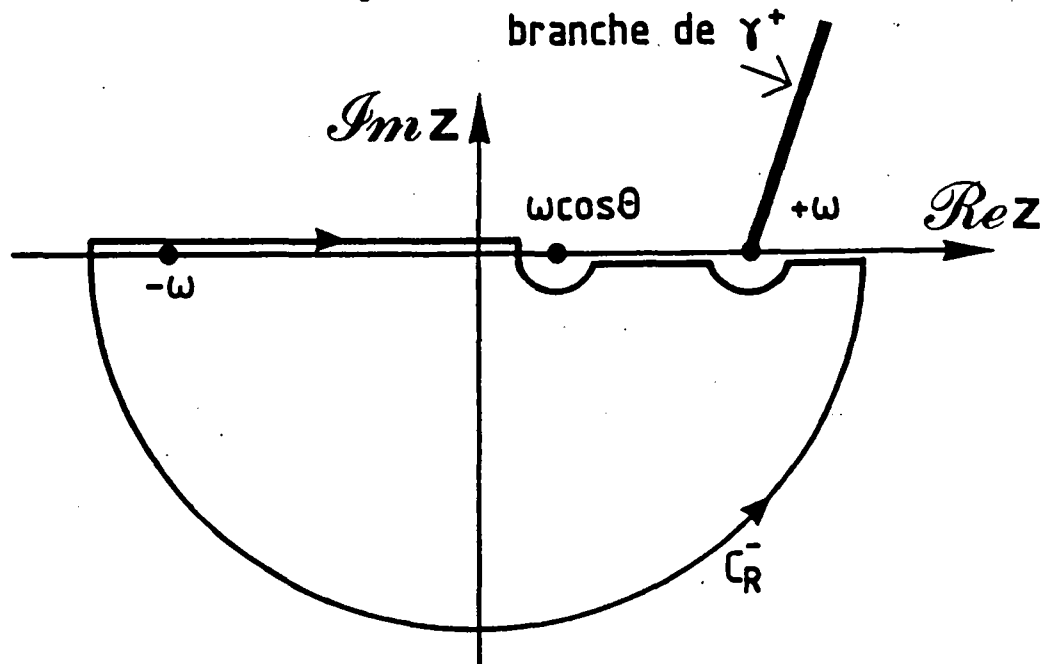


Schéma du contour :

On remarquera la disparition de la branche de  $(k + \omega)^{1/2}$

Cette inégalité, jointe au comportement asymptotique de l'intégrande de (1.76) nous permet alors facilement d'obtenir :

$$u_D(x,0) = 0 \quad \text{pour } x < 0$$

c) Condition en  $(x,0)$  pour  $x > 0$

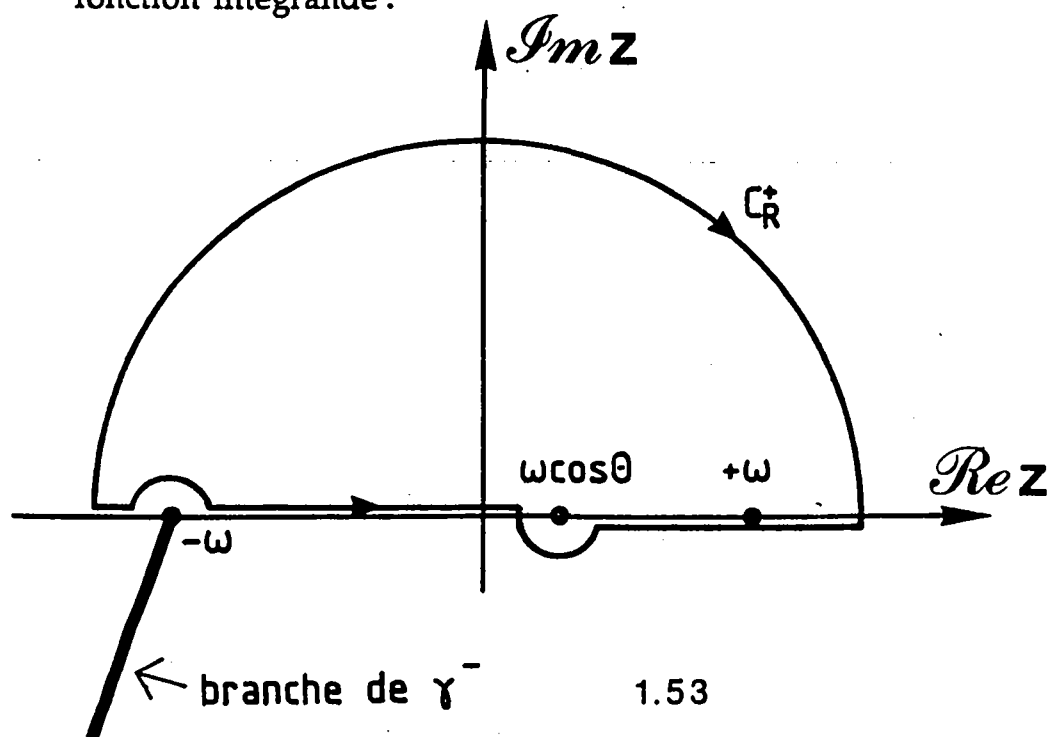
On a :

$$\frac{\partial u_D}{\partial y}(x,0) = -\frac{\gamma^+(k_x)}{2i\pi} \int_{\Gamma_\theta} \frac{(-\gamma(k))}{\gamma^+(k)} \frac{\exp + ikx dk}{(k - k_x)}$$

soit :

$$(1.77) \quad \frac{\partial u_D}{\partial y}(x,0) = \frac{\gamma^+(k_x)}{2i\pi} \int_{\Gamma_\theta} \frac{\gamma^-(k) \exp ikx dk}{(k - k_x)}$$

Cette fois-ci, c'est  $\gamma^+(k)$  qui a disparu ; on déforme dans ce cas le contour dans le demi-plan supérieur, en prenant soin de prendre en compte le pôle de la fonction intégrande :





On remarquera la disparition de la branche  $(+k - \omega)^{1/2}$

On obtient :

$$\frac{\partial u_D}{\partial y}(x,0) = \frac{\gamma^+(k_x)}{2i\pi} \left\{ 2i\pi \operatorname{Res} \left( \frac{\gamma^-(k) \exp ikx}{k - k_x}, k = k_x \right) + \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R^+} \frac{\gamma^-(z) \exp izx}{(z - k_x)} dz \right\}$$

Si  $x$  est positif,  $\exp izx$  est évanescent à l'infini dans le demi-plan supérieur.

On peut donc montrer que :

$$\frac{\partial u_D}{\partial y}(x,0) = \frac{\gamma^+(k_x)}{2i\pi} \left\{ 2i\pi \gamma^-(k_x) \exp ik_x x + 0 \right\}$$

Ou encore :

$$\frac{\partial u_D}{\partial y}(x,0) = \gamma(k_x) \exp ik_x x = -i\omega \sin \theta \exp ik_x x$$

On a donc bien :

$$\frac{\partial u_D}{\partial y}(x,0) = -\frac{\partial u_I}{\partial y}(x,0).$$

**CHAPITRE 2**  
**ETUDE DE L'APPROXIMATION NUMERIQUE**  
**DU PROBLEME DE LA DIFFRACTION**

## 2.1. PRESENTATION D'UNE CLASSE DE SCHEMAS NUMERIQUES DU SECOND ORDRE

L'objet de cette section est de présenter la classe de schémas numériques que nous avons choisi d'étudier. Nous commençons par présenter ces schémas en milieu homogène (Paragraphe 2.1.1) puis en milieu fissuré (Paragraphe 2.1.2). D'une façon générale, ces schémas sont construits à partir d'un maillage régulier du plan  $\mathbb{R}^2$  caractérisé par un pas de discrétisation que l'on note  $h$ . La solution numérique est alors évaluée en chaque nœud  $(p, q)$  du maillage. D'un point de vue notation, nous utiliserons les deux écritures :

$$u^h(p, q) \quad \text{ou} \quad u^h_{p,q}$$

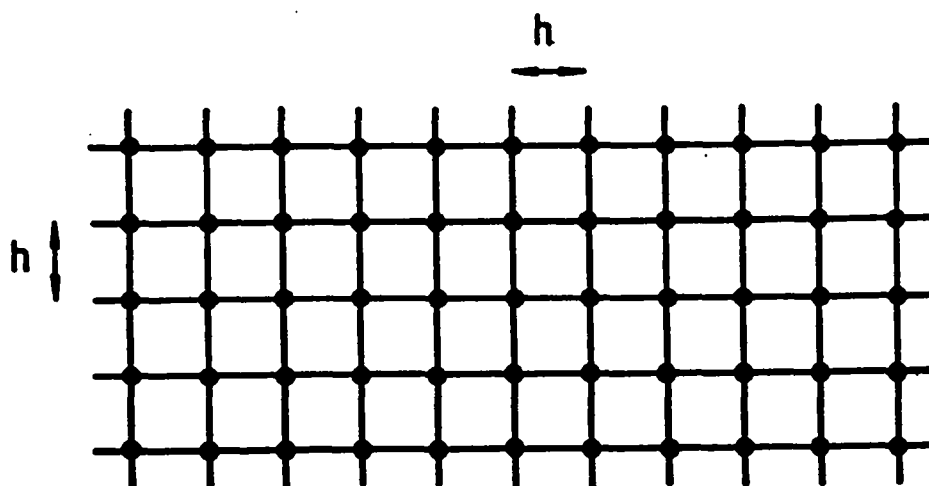
pour désigner la valeur de  $u^h$  au nœud  $(p, q)$ . La première notation considère  $u^h$  comme une fonction discrète tandis que la seconde la considère comme une suite indicée par  $\mathbb{Z}^2$ .  $u^h$  peut également être définie sur  $\mathbb{R}^2$  tout entier en convenant de poser :

$$\left\{ \begin{array}{l} u^h(x, y) = u^h(p, q) = u^h_{p,q} \\ \text{si} \quad \left(p - \frac{1}{2}\right)h \leq x < \left(p + \frac{1}{2}\right)h \\ \text{et si} \quad \left(q - \frac{1}{2}\right)h \leq y < \left(q + \frac{1}{2}\right)h \end{array} \right.$$

Cette dernière extension peut être utile pour comparer cas continu et cas discret.

### 2.1.1. Le schéma non perturbé dans tout l'espace et ses propriétés

Nous désignons par  $\mathbb{R}^2_h$  un maillage régulier et uniforme du plan, de pas  $h$  dans chacune des directions  $x$  et  $y$ .



A ce maillage nous associons l'espace de Hilbert :

$$V_h \cap L_h^2 = \{v_h = (v_{ij}) / \sum_{ij} |v_{ij}|^2 h^2 < +\infty\}$$

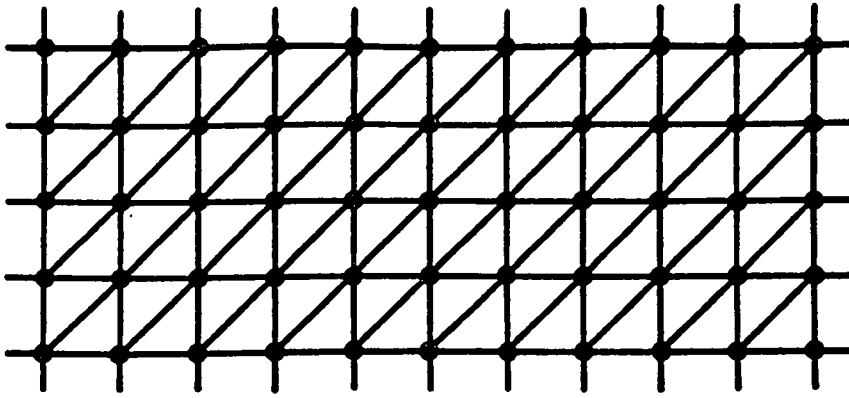
Nous allons construire une classe de schémas variationnels pour le laplacien, à partir de la formule de Green :

$$(2.1) \quad (-\Delta u, v) = (\nabla u, \nabla v) = a(u, v)$$

Pour cela, nous allons construire l'équivalent discret, dans  $V_h \cap L_h^2$  de la forme bilinéaire  $a(u, v)$ . Dans ce but, nous introduisons deux opérateurs d'interpolation :

$$\left| \begin{array}{l} p_h : V_h \cap L_h^2 \rightarrow H^1(\mathbb{R}^2) \\ q_h : V_h \cap L_h^2 \rightarrow H^1(\mathbb{R}^2) \end{array} \right.$$

où  $q_h$  est l'opérateur d'interpolation Q1 (cf. [Ra]) associé au maillage  $R_h^2$  et  $p_h$ , l'opérateur d'interpolation P1 (cf. [Ra]) associé à la triangulation  $T_h$  ci-dessous (les nœuds de cette triangulation coïncidant avec ceux du maillage  $R_h^2$ ).



On définit alors,  $\lambda$  désignant un paramètre de pondération, l'équivalent discret de la forme bilinéaire  $a(u,v)$  par :

$$(2.2) \quad a_{h,\lambda}(u,v) = (3\lambda - 2) a(p_h u_h, p_h v_h) + (3 - 3\lambda) a(q_h u_h, q_h v_h)$$

à partir de quoi on définit l'opérateur «laplacien discret»  $\Delta_{h,\lambda}$  par :

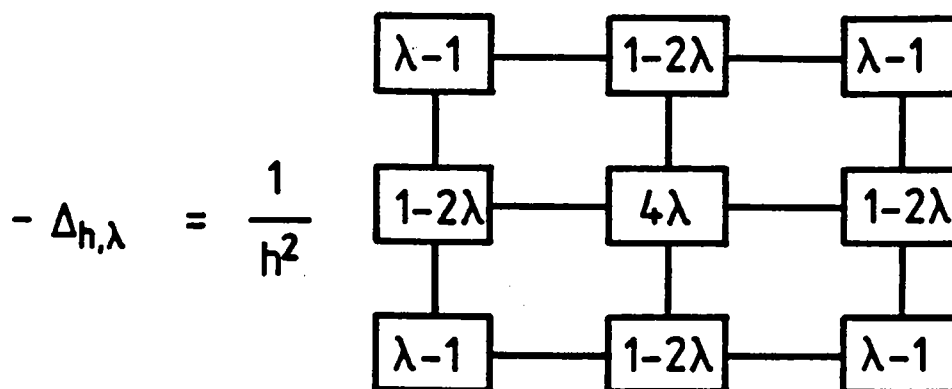
$$(2.3) \quad (-\Delta_{h,\lambda} u_h, v_h) = a_{h,\lambda}(u_h, v_h)$$

où  $(\cdot, \cdot)$  désigne ici le produit scalaire dans  $V_h \cap L^2_h$ .

Il est alors facile de voir que si  $v_h = -\Delta_{h,\lambda} u_h$ , on a :

$$(2.4) \quad \left| \begin{aligned} v_{ij} = \frac{1}{h^2} \{ & 4\lambda v_{ij} + (1 - 2\lambda) (v_{i+1,j} + v_{i,j+1} + v_{i,j-1} + v_{i-1,j}) \\ & + (\lambda - 1) (v_{i+1,j+1} + v_{i+1,j-1} + v_{i-1,j+1} + v_{i-1,j-1}) \} \end{aligned} \right.$$

ce que l'on peut représenter de façon symbolique par :



On construit alors un schéma du deuxième ordre de l'équation d'Helmholtz dans  $R^2$  :

$$(2.5) \quad \Delta u + \omega^2 u = 0$$

avec l'équation aux différences :

$$(2.6) \quad \Delta_{h,\lambda} u_h + \omega^2 u_h = 0$$

La relation de dispersion de (2.6) s'écrit, si l'on désigne respectivement par  $k_x$  et  $k_y$  les variables de Fourier dans les directions  $x$  et  $y$  :

$$(2.7) \quad \omega^2 = D_{h,\lambda}(k) \quad k = (k_x, k_y)$$

où la fonction  $D_{h,\lambda}(k)$  est définie par :

$$(2.8) \quad D_{h,\lambda}(k) = \frac{1}{2} (4\lambda + 2(1 - 2\lambda) (\cos k_x h + \cos k_y h) + 4(\lambda - 1) \cos k_x h \cos k_y h)$$

ce que l'on peut aussi écrire :

$$(2.9) \quad D_{h,\lambda}(k) = \frac{4}{h^2} \left\{ \sin^2 \frac{k_x h}{2} + \sin^2 \frac{k_y h}{2} + 4(\lambda - 1) \sin^2 \frac{k_x h}{2} \sin^2 \frac{k_y h}{2} \right\}$$

Il est clair sur la formule (2.9) qu'on a une approximation du second ordre. Du reste, un développement limité prouve que :

$$(2.10) \quad D_{h,\lambda}(k) = |k|^2 - \frac{h^2}{12} (k_x^4 + k_y^4 + 12(1 - \lambda) k_x^2 k_y^2) + |k|^2 O(|k|^4 h^4)$$

On notera que la valeur  $\lambda = \frac{5}{6}$  joue un rôle particulier dans la mesure où :

$$D_{h, \frac{5}{6}}(k) = |k|^2 - \frac{|k|^4 h^2}{12} + |k|^2 O(|k|^4 h^4)$$

On obtient alors le schéma le plus «isotrope» de la famille, connu sous le nom de schéma d'Arakawa ([Dal]).

On peut montrer que l'opérateur  $-\Delta_{h,\lambda}$  est auto-adjoint dans  $V_h \cap L^2_h$  et qu'il est positif si et seulement si :

$$(2.11) \quad \lambda \geq \frac{1}{2}$$

hypothèse que nous supposerons satisfaite dans toute la suite. Il est alors intéressant de calculer la norme de l'opérateur  $-\Delta_{h,\lambda}$  à l'aide de la formule :

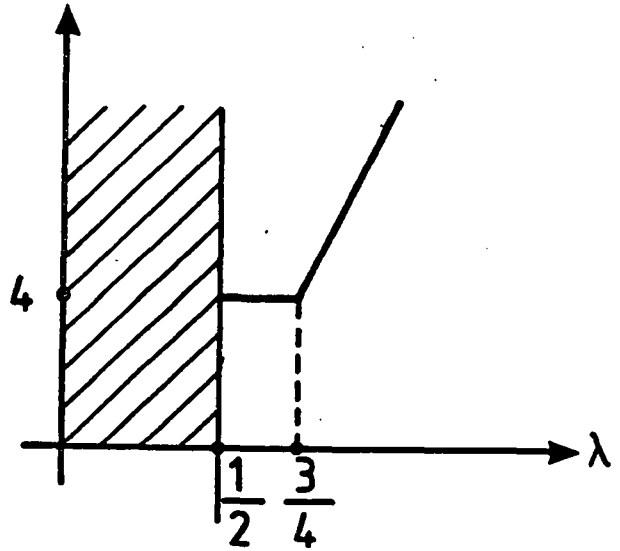
$$||-\Delta_{h,\lambda}|| = \sup_{k \in \mathbb{R}^2} |D_{h,\lambda}(k)|$$

Un calcul simple permet d'obtenir :

$$(2.12) \quad ||\Delta_{h,\lambda}|| = \frac{\Psi(\lambda)}{h^2}$$

où la fonction  $\Psi(\lambda)$  est définie par :

$$\begin{cases} \Psi(\lambda) = 4 & \text{si } \frac{1}{2} \leq \lambda \leq \frac{3}{4} \\ \Psi(\lambda) = 8\left(\lambda - \frac{1}{2}\right) & \text{si } \lambda \geq \frac{3}{4} \end{cases}$$



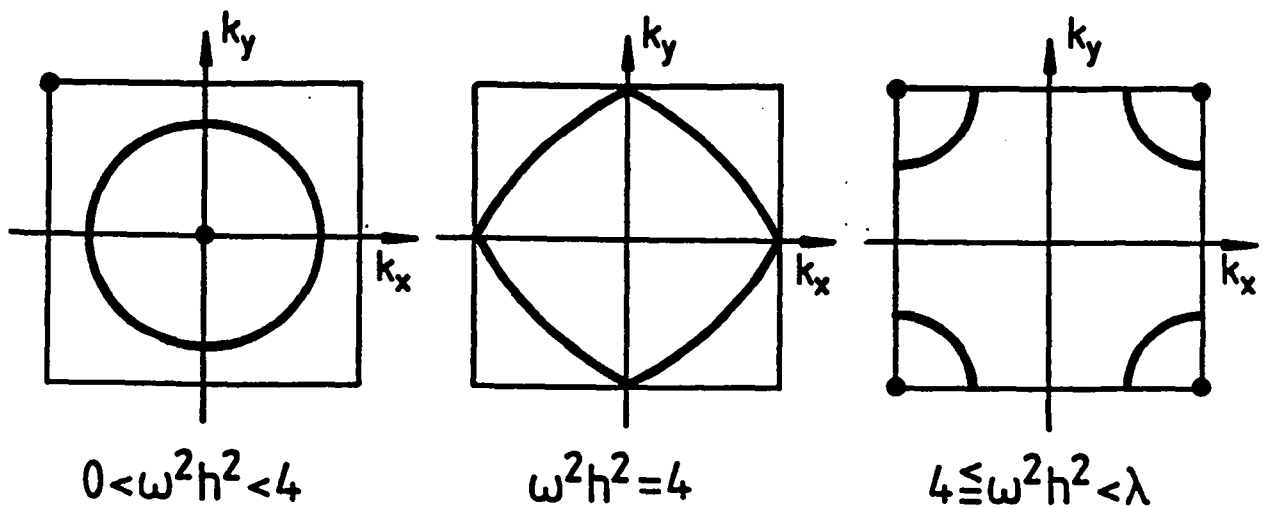
Le comportement de trois schémas numériques appliqués à l'équation d'Helmholtz a déjà été étudié dans [Ba]. Cette étude repose sur l'analyse des courbes de lenteur du schéma qui vont jouer également un rôle important au chapitre 3 au moment de l'étude du comportement asymptotique de l'onde diffractée. Rappelons que ces courbes sont, par définition, les courbes du plan  $(k_x, k_y)$  d'équation  $D_{h,\lambda}(k) = \omega^2$ . Il est clair sur l'expression de  $D_{h,\lambda}(k)$  qu'elles ne dépendent que du paramètre adimensionnel  $\omega h$ . Par ailleurs, la fonction  $D_{h,\lambda}(k)$  étant périodique de période  $2\pi/h$  dans chacune des directions  $k_x$  et  $k_y$ , il suffit de s'intéresser à la portion de plan  $\left[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right] \times \left[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right]$ .

Bien entendu, ces courbes n'existent que lorsque  $\omega^2 h^2$  parcourt l'intervalle  $[0, \Psi(\lambda)]$ . Lorsque  $\omega^2 h^2$  est strictement supérieur à  $\Psi(\lambda)$ , il n'existe pas d'onde plane numérique propagative de pulsation  $\omega$ . C'est la géométrie des courbes de lenteur qui va permettre de distinguer deux classes de schémas. Il est clair que, en vertu de la consistance du schéma, les courbes de lenteur sont, pour les petites valeurs de  $\omega h$ , proches du cercle  $\omega^2 = |k|^2$  correspondant au cas continu et ce, quel que soit le schéma considéré. Mais lorsque  $\omega h$  augmente, ces courbes évoluent de deux façons différentes suivant la valeur de  $\lambda$  :

(i) 1er cas :  $\lambda > \frac{3}{4}$

Lorsque  $\omega h$  augmente, le cercle initial se déforme jusqu'à ce que, pour  $\omega^2 h^2 = 4$ , la courbe touche les côtés du carré  $K_h = \left[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right] \times \left[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right]$

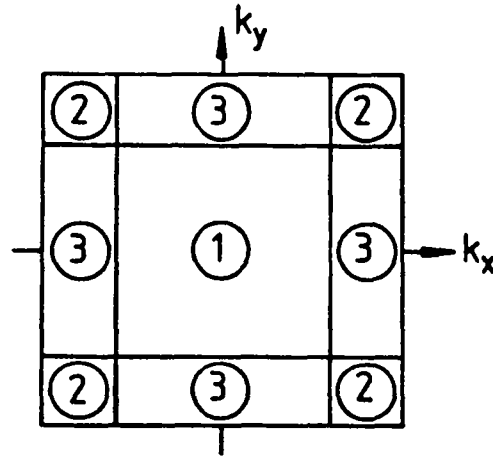
aux points d'intersection avec les axes de coordonnées. Puis, lorsque  $4 \leq \omega^2 h^2 \leq \Psi(\lambda)$ , la courbe de lenteur se sépare en quatre branches symétriques les unes des autres par rapport aux axes de coordonnées comme indiqué sur le schéma ci-dessous.



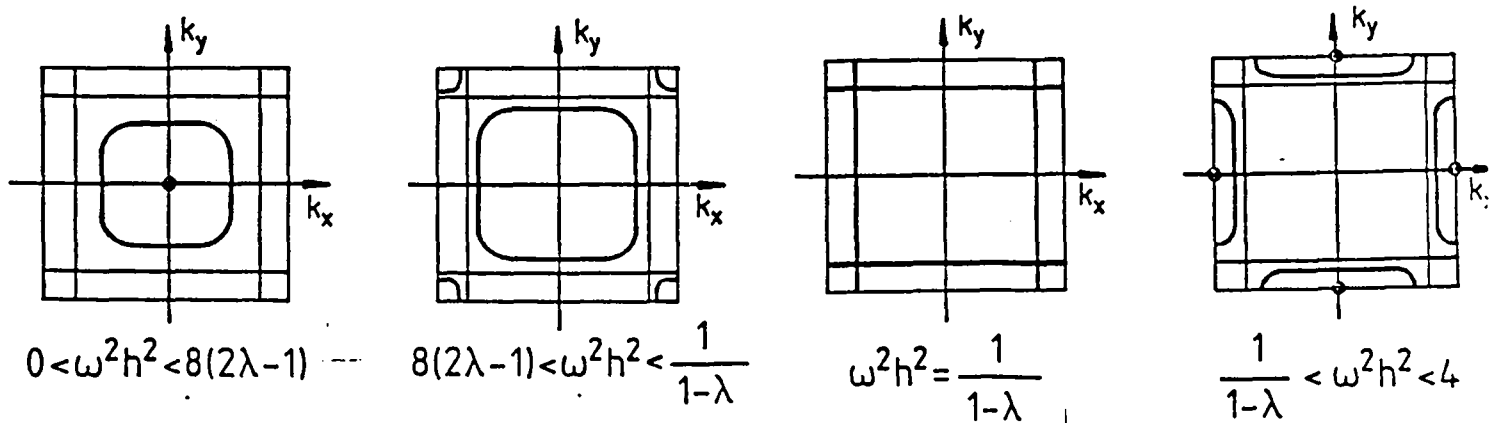
(ii) 2ème cas :  $\frac{1}{2} \leq \lambda < \frac{3}{4}$

Pour décrire le comportement des courbes de lenteur dans ce cas, il convient dans un premier temps de partager le carré  $K_h$  en neuf secteurs délimités par les droites  $\cos k_x h = \frac{1-2\lambda}{2(1-\lambda)}$  et  $\cos k_y h = \frac{1-2\lambda}{2(1-\lambda)}$  et 3 zones, comme indiqué ci-dessous :





Pour les petites valeurs de  $\omega h$ , la courbe de lenteur est une courbe convexe qui occupe la zone 1 et enflé régulièrement tout en prenant progressivement la forme du carré délimitant cette zone. Lorsque  $\omega^2 h^2$  atteint la première valeur critique  $\omega^2 h^2 = 8(2\lambda - 1)$ , 4 branches apparaissent dans les quatre secteurs de la zone 2. Elles apparaissent comme quatre quarts de cercles déformés, centrés aux quatre sommets du carré  $K_h$ , qui tendent vers les segments limites de la zone 2. La courbe centrale et les quatre arcs supplémentaires atteignent conjointement leurs formes limites lorsque  $\omega^2 h^2 = \frac{1}{1-\lambda}$ . Lorsque  $\omega^2 h^2$  varie de  $\frac{1}{1-\lambda}$  à 4, la courbe se compose de 4 branches occupant les 4 secteurs de la zone 3. Ces quatre branches convergent progressivement vers les 4 points d'intersection des axes avec le carré  $K_h$ . Nous illustrons l'évolution de la courbe de lenteur lorsque  $\omega h$  varie sur les schémas ci-dessous :

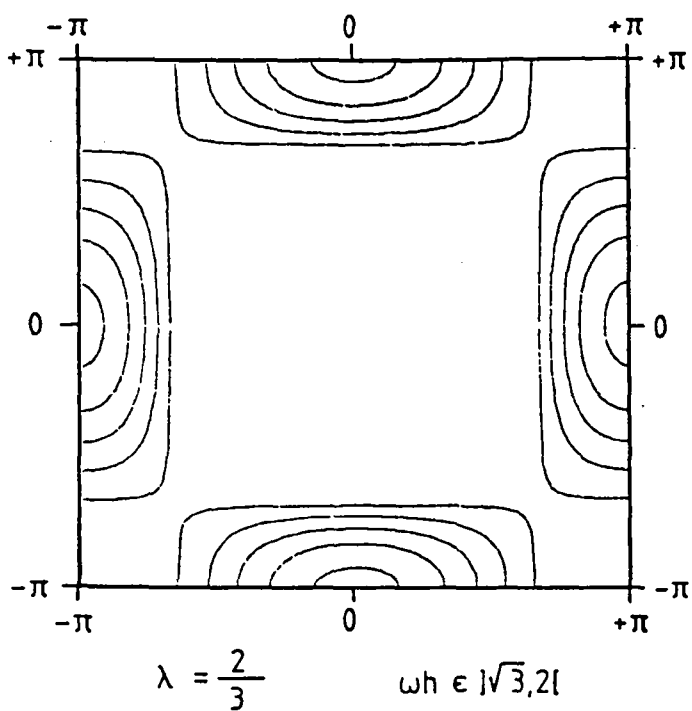
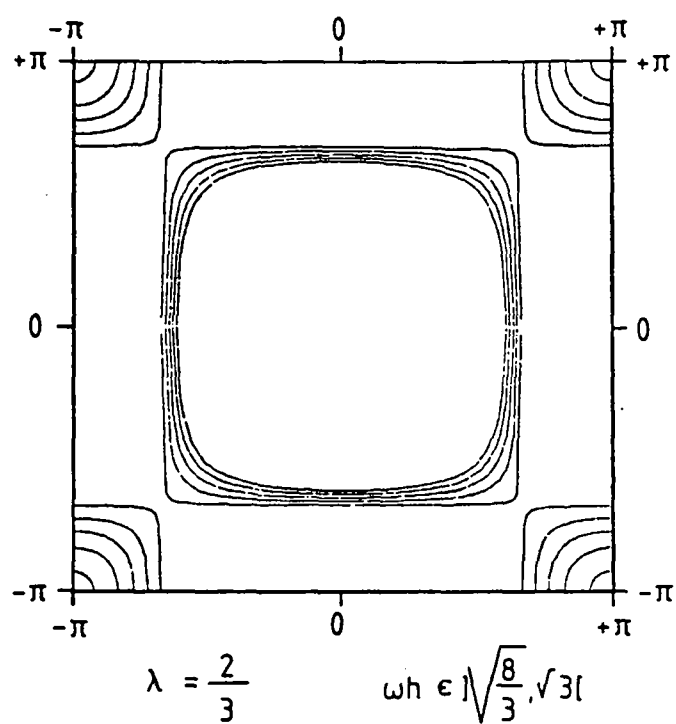
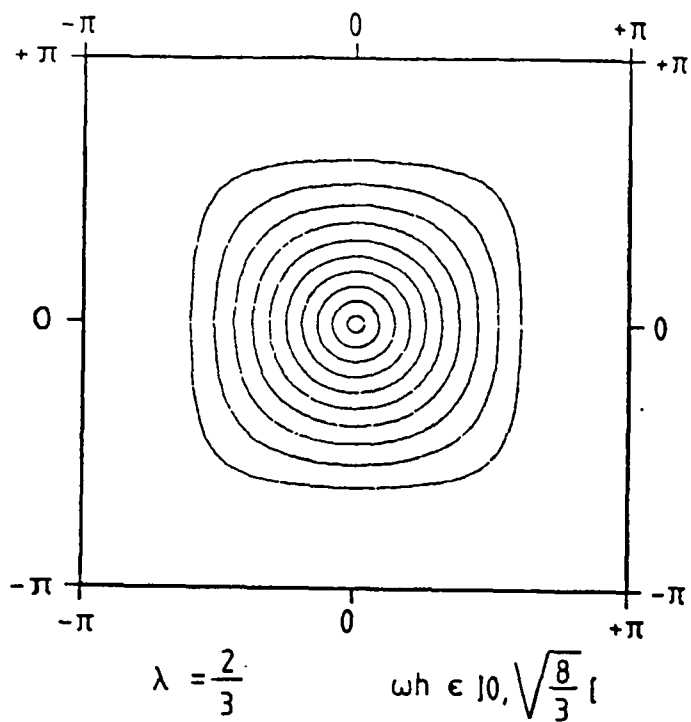


Pour mieux illustrer ces deux classes de schémas, nous montrons sur les figures 1 à 5 l'évolution de l'ensemble des lignes de niveaux de la fonction  $D_{h,\lambda}(k)$  lorsque  $\lambda$  varie, ce qui permet de mieux comprendre la continuité du phénomène en fonction de  $\lambda$ .

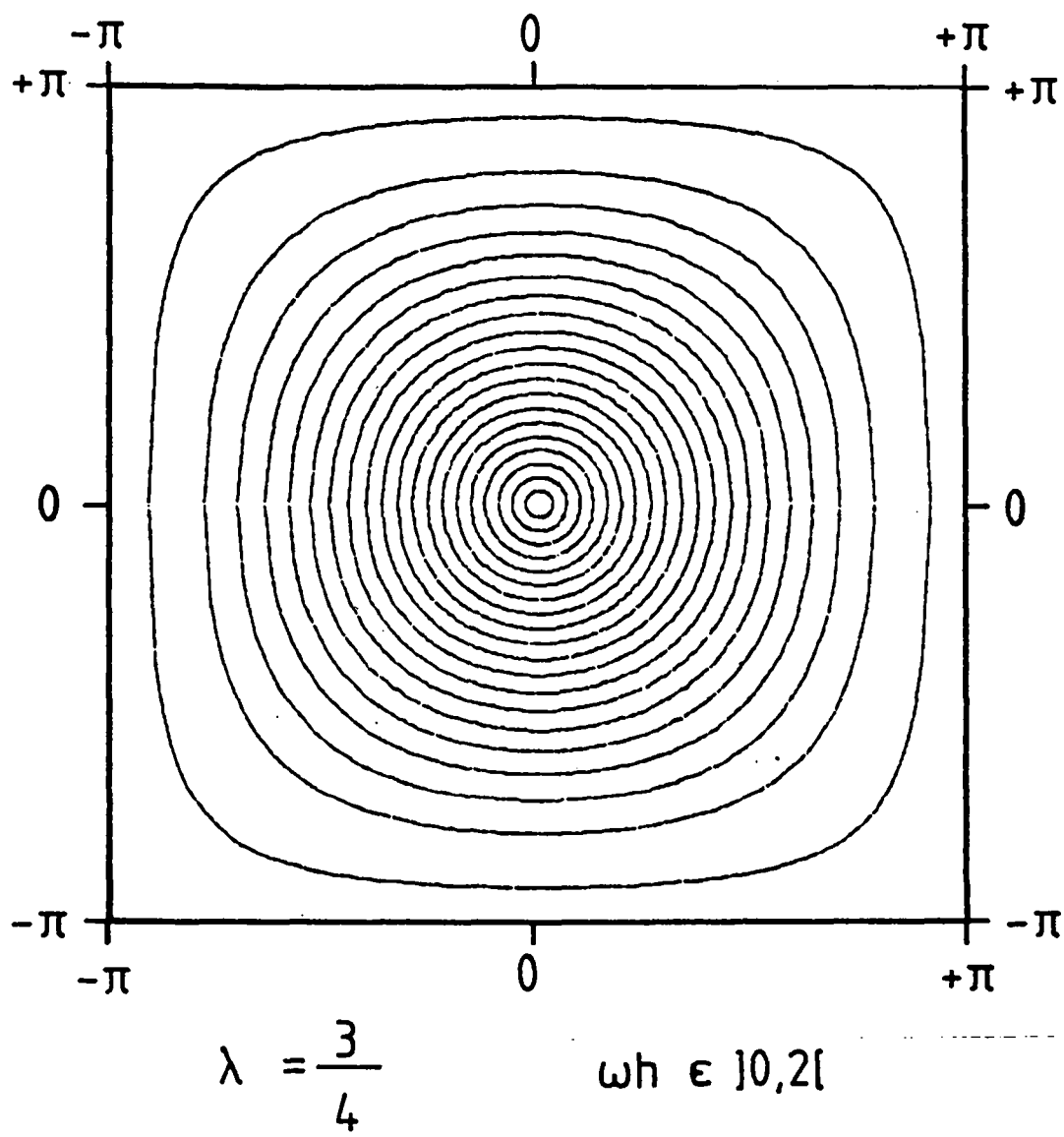
Il est clair que le schéma  $\lambda = \frac{3}{4}$  joue un rôle privilégié. C'est en effet le seul pour lequel les courbes de niveau sont toutes constituées d'une seule composante connexe, convexe qui plus est (cf. figure 2). A titre indicatif, signalons que ce schéma est donné par la «molécule» suivante :

$$-\Delta_{h,\frac{3}{4}} = \frac{1}{4h^2} \begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & -2 & -1 \\ \hline -2 & 12 & -2 \\ \hline -1 & -2 & -1 \\ \hline \end{array}$$

Comme on le verra, la géométrie de ces courbes influe directement sur le comportement asymptotique de l'onde diffractée. Elle intervient aussi indirectement pour l'obtention de la solution elle-même. En effet, au moment de l'application de Wiener-Hopf et plus précisément au niveau de la décomposition multiplicative de Wiener-Hopf, on établira un lien entre la géométrie des courbes de lenteur et l'étude de l'analyticité et des branches de la fonction  $\gamma^h_\epsilon(z)$ , équivalent discret de la fonction  $\gamma_\epsilon(z) = (z^2 - \omega^2 - i\epsilon\omega)^{1/2}$  rencontrée dans le cas continu. Cette remarque prend un relief particulier lorsque l'on sait que c'est la décomposition multiplicative de  $\gamma_\epsilon(z)$  qui constitue le nœud de l'étude. Pour clore ce paragraphe, signalons qu'une deuxième valeur charnière de  $\lambda$  apparaîtra au moment de l'étude asymptotique menée au chapitre 3. Cette valeur est  $\lambda = 1$  et correspond au cas du schéma P1 ou schéma à 5 points.



*Figure 1*



*Figure 2*

Figure 3

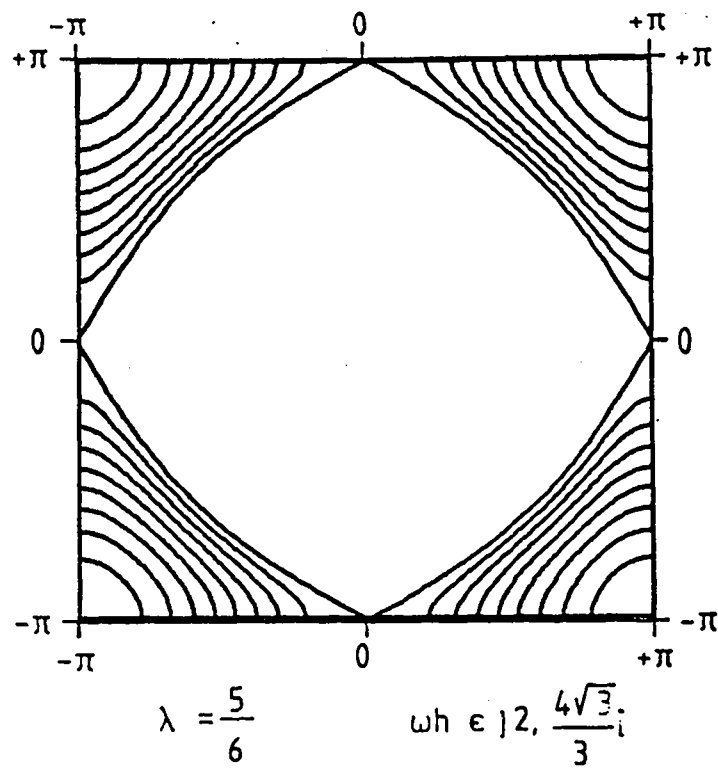
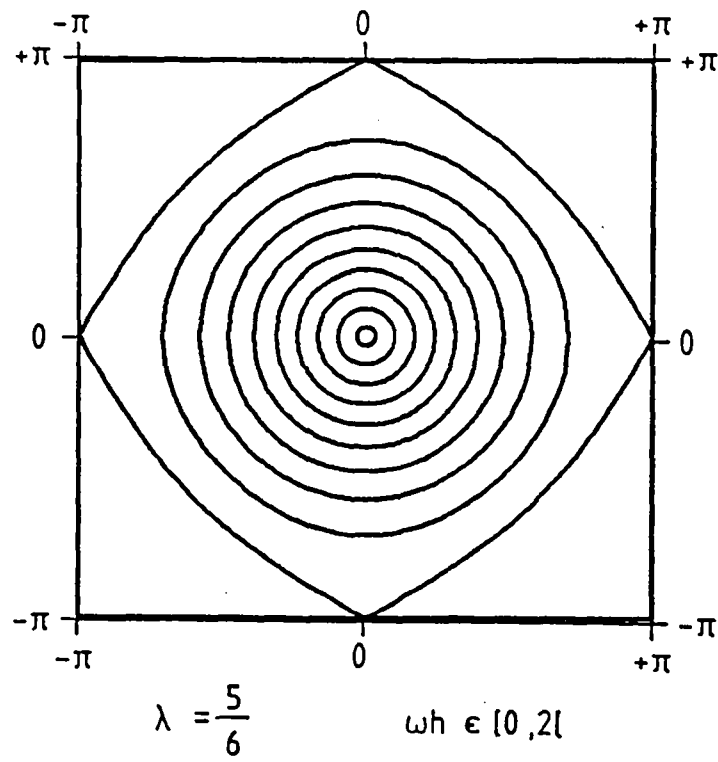


Figure 4

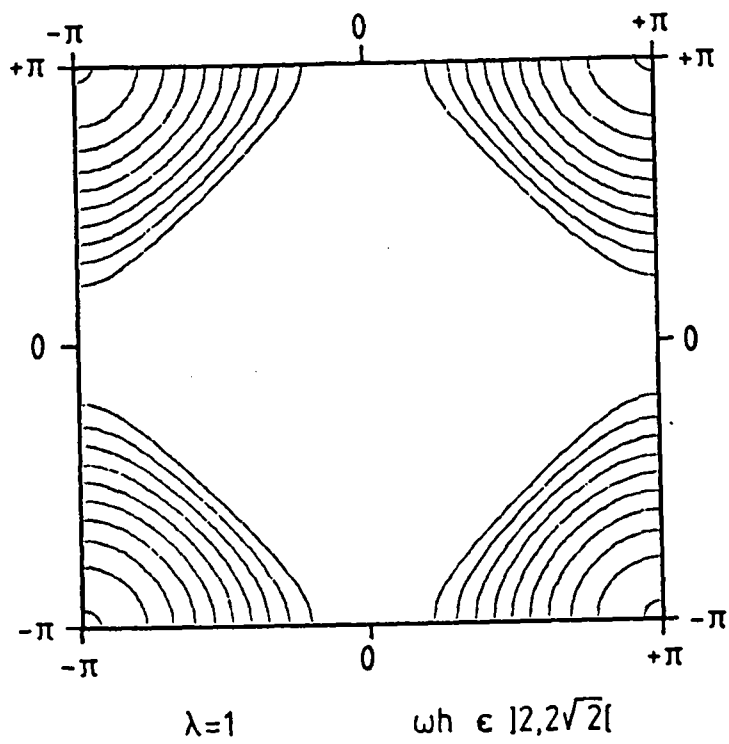
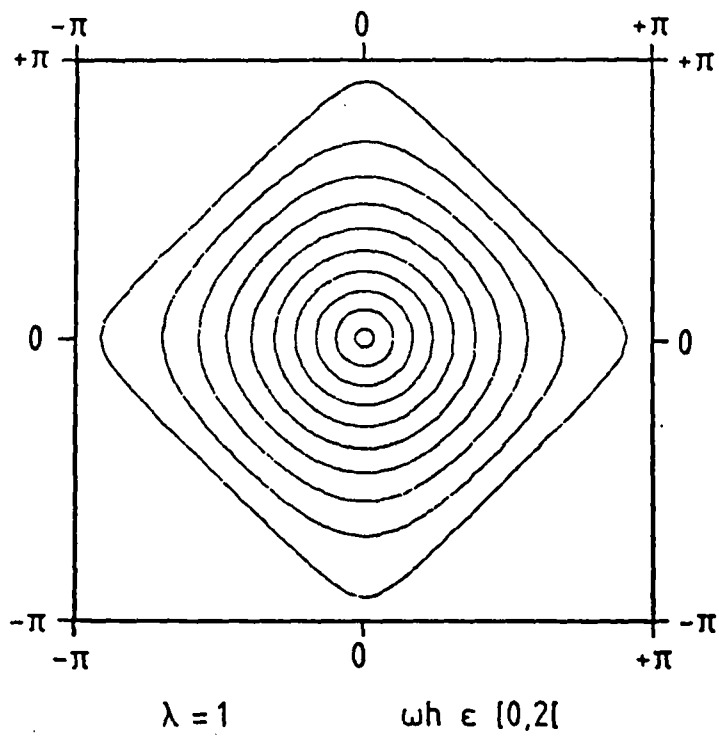
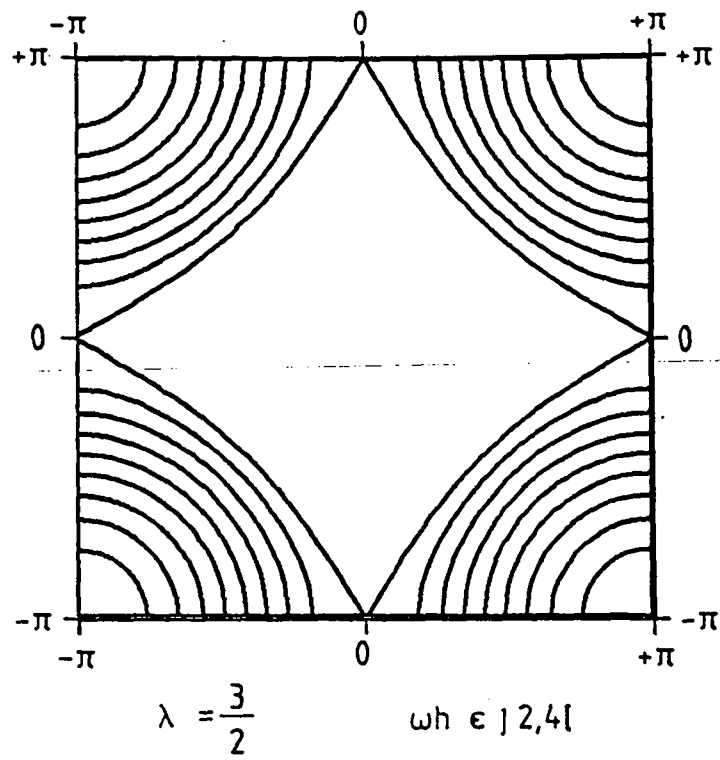
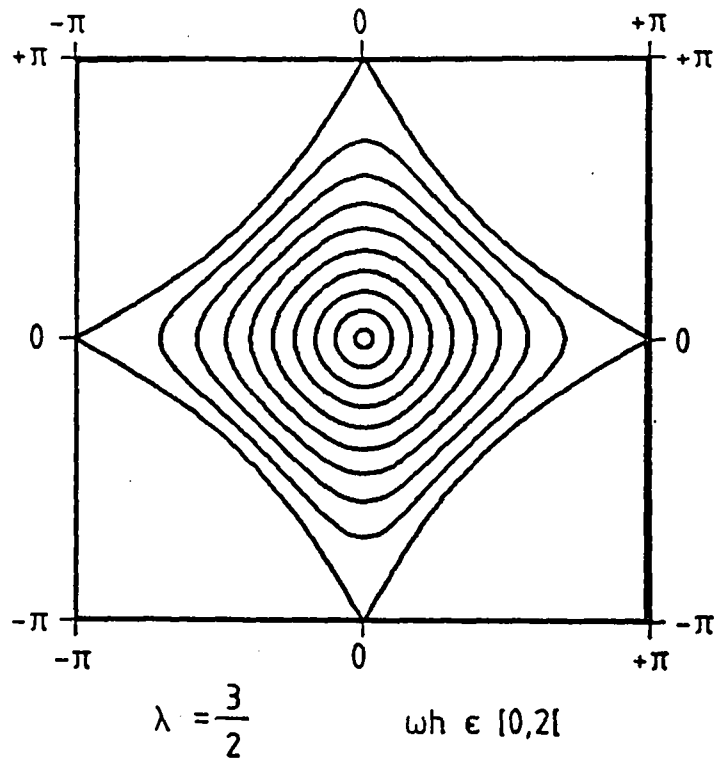
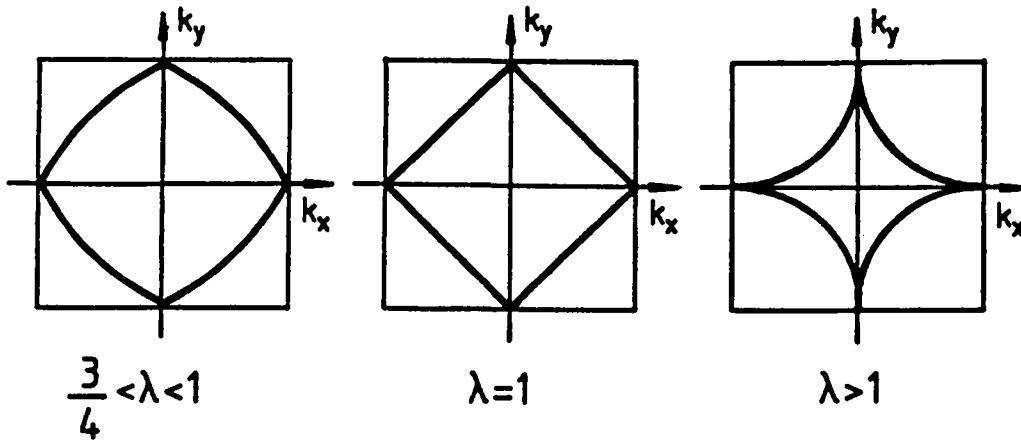


Figure 5



Cette valeur charnière permet de distinguer les schémas de la classe (i)  $\left(\lambda = \frac{3}{4}\right)$  au niveau de la géométrie des courbes limites correspondant à  $\omega^2 h^2 = 4$ , comme illustré ci-dessous :



Ainsi, le schéma P1 joue-t-il un rôle tout à fait particulier dans la mesure où c'est le seul de la famille (i) pour lequel la convexité de la courbe de lenteur reste constante le long de cette courbe et ce, quelle que soit la valeur du paramètre  $\omega h$ . Les conséquences de cette propriété apparaîtront clairement au chapitre 3.

### 2.1.2. Le schéma dans le domaine avec fissure

Comme on l'a déjà présenté en introduction, on dissocie les nœuds de la lèvres supérieure de la fissure et ceux de la lèvres inférieure de la fissure au niveau des nœuds  $\{p \geq 1, q = 0\}$  correspondant à la demi-droite  $\Gamma = \{(x, 0), x \geq 0\}$ . Ainsi à chaque couple  $(p, 0)$ ,  $p \geq 1$ , on associe non plus une valeur de la solution discrète mais deux valeurs, à savoir :

- $u_{p,0}^+$  : trace de la solution sur la lèvre supérieure de la fissure
- $u_{p,0}^-$  : trace de la solution sur la lèvre inférieure de la fissure

On définit ainsi l'espace de Hilbert  $V_{F_h}^h \cap L_{F_h}^2$ , des solutions dans le domaine avec fissure, à l'aide de la norme hilbertienne :

$$(2.13) \quad ||u^h||^2 = \sum_{(pq) \in I} |u_{p,q}|^2 h^2 + \sum_{p \geq 1} |u_{p,0}^+|^2 \frac{h^2}{2} + \sum_{p \geq 1} |u_{p,0}^-|^2 \frac{h^2}{2} + |u_{\infty}|^2 h^2$$



où bien entendu l'ensemble I des nœuds intérieurs est défini par :

$$I = [Z \times Z] \quad [N^* \times \{o\}]$$

Pour construire le schéma d'approximation  $(S_\lambda)$  de l'équation d'Helmholtz, nous écrivons cette équation dans le domaine avec fissure  $\Omega$  sous la forme :

$$(2.14) \quad -\Delta u + \omega^2 u = 0$$

où  $A$  est l'opérateur auto-adjoint dans  $L^2(\Omega)$  défini par :

$$(2.15) \quad \left| \begin{array}{l} D(A) = \left\{ u \in H^1(\Omega) \mid \Delta u \in L^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0 \right\} \\ Au = -\Delta u \quad \forall u \in D(A) \end{array} \right.$$

auquel correspond la formulation variationnelle :

$$(2.16) \quad \forall (u, v) \in D(A) \times H^1(\Omega) \quad (Au, v) = a(u, v) = (\nabla u, \nabla v)$$

Pour construire le schéma nous introduisons, conformément à ce qui a été fait en 1.2.1, les opérateurs d'interpolation  $P_1$  et  $Q_1$  sur l'espace  $V_h^F \cap L_h^2$  :

$$\left| \begin{array}{l} P_h : V_h^F \cap L_h^2 \rightarrow H^1(\Omega) \\ Q_h : V_h^F \cap L_h^2 \rightarrow H^1(\Omega) \end{array} \right.$$

On construit ainsi des fonctions qui peuvent être discontinues le long de  $\Gamma$ . Pour illustrer ceci nous avons représenté sur la figure 6 les fonctions de base engendrant les espaces  $p_h(V_h^F \cap L_h^2)$ .



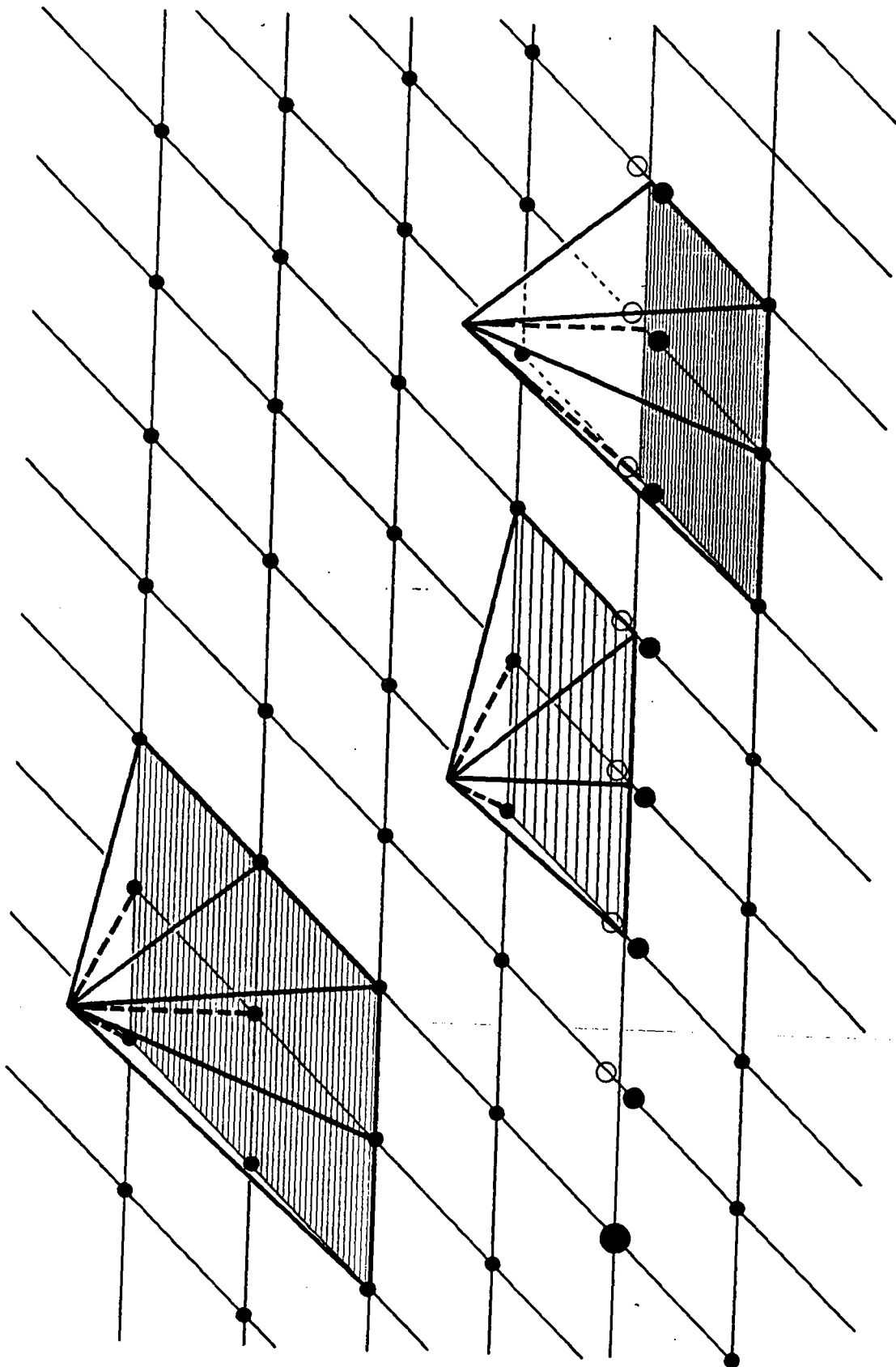


figure 6

Bien entendu si on identifie le sous-espace des fonctions  $V_h^F \cap L_h^2$  qui sont continues sur la fissure (c'est-à-dire pour lesquels  $u_{p,0}^+ = u_{p,0}^-$ ,  $\forall p \geq 1$ ) à l'espace  $V_h \cap L_h^2$ , il est clair que les opérateurs  $P_h$  et  $Q_h$  définis plus haut prolongent ceux définis au paragraphe 1.2.1.

On définit alors l'opérateur  $A_{h,\lambda}$  (équivalent discret de  $A$ ), par la formule :

$$(2.17) \quad (A_{h,\lambda} u_h, v_h) = (3\lambda - 2) a(p_h u_h, p_h v_h) + (3 - 3\lambda) a(q_h u_h, q_h v_h)$$

Bien sûr, par construction même, l'opérateur  $A_{h,\lambda}$  ainsi défini prolonge l'opérateur  $-\Delta_{h,\lambda}$  construit au paragraphe 1.2.1. Il suffit donc de donner les valeurs de  $v_h = A_{h,\lambda} u_h$  sur les nœuds de la fissure pour définir complètement  $A_{h,\lambda}$  étant entendu que, aux nœuds intérieurs,  $v_{p,q}$  est à nouveau donné par la formule (2.4). On obtient :

$$(2.18) \quad v_{p,0}^+ = \frac{1}{h^2} \{ -4\lambda u_{p,0}^+ + (2\lambda - 1)(u_{p-1,0}^+ + u_{p+1,0}^+ + 2u_{p,1}) + 2(1 - \lambda)(u_{p-1,1} + u_{p+1,1}) \}$$

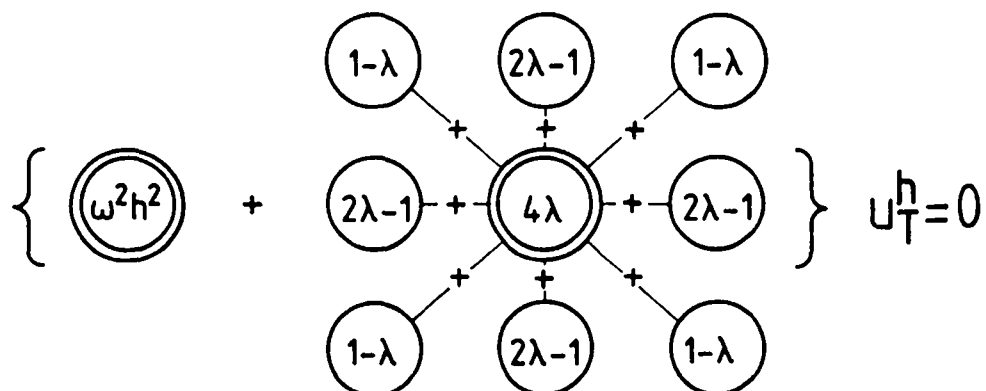
$$(2.19) \quad v_{p,0}^- = \frac{1}{h^2} \{ -4\lambda u_{p,0}^- + (2\lambda - 1)(u_{p-1,0}^- + u_{p+1,0}^- + 2u_{p,1}) + 2(1 - \lambda)(u_{p-1,-1} + u_{p+1,-1}) \}$$

$$(2.20) \quad v_{0,0} = \frac{1}{h^2} \{ -4\lambda u_{p,0}^+ + (1 - \lambda)(u_{1,1} + u_{-1,1} + u_{1,-1} + u_{-1,-1}) + (2\lambda - 1)(u_{-1,0} + u_{0,1} + u_{0,-1} + \frac{1}{2}(u_{0,1}^+ + u_{0,1}^-)) \}$$

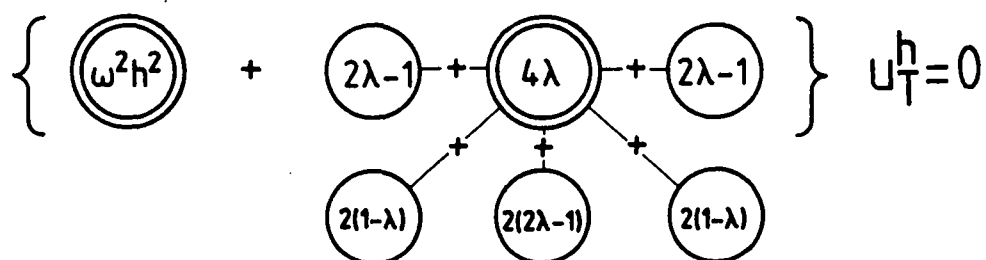
Le schéma d'approximation  $(S_\lambda)$  de l'équation d'Helmholtz (2.14) s'écrit donc :

$$(2.21) \quad -A_{h,\lambda} u_h + \omega^2 u_h = 0 \quad (S_\lambda)$$

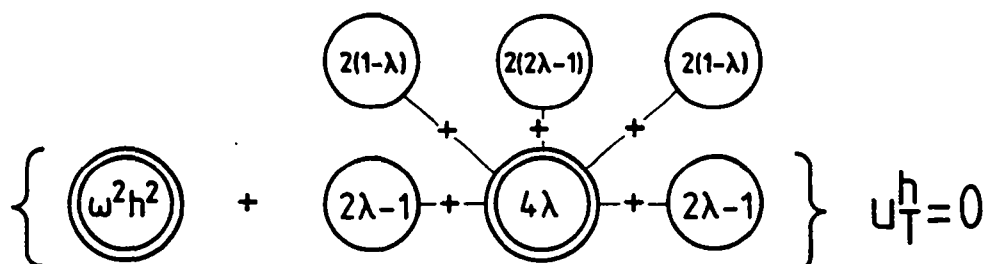
Nœud  
intérieur



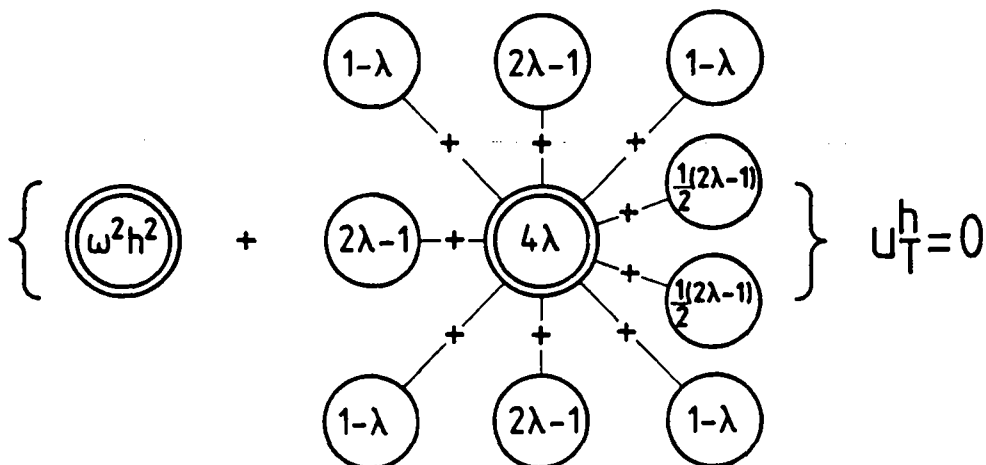
Lèvre  
inférieure



Lèvre  
supérieure



Pointe  
de la  
fissure



## 2.2. LE PROBLEME DE LA DIFFRACTION. REDUCTION A UN PROBLEME DANS LE DEMI-ESPACE

Comme en continu, le problème de la diffraction que nous considérons consiste en la recherche d'une solution particulière de (2.21) sous la forme :

$$(2.22) \quad u^h = u_T^h = u_I^h + u_D^h$$

où  $u_I^h$  désigne l'onde incidente,  $u_D^h$  l'onde diffractée,  $u_T^h$  le champ total.

L'onde incidente est une «solution» de l'équation d'Helmholtz discrète «sans fissure».

Elle est construite à partir d'une solution de l'équation :

$$(2.23) \quad \omega^2 v_I^h + \Delta_{h,\lambda} v_I^h = 0$$

$v_I^h$  étant choisi, on définit l'onde incidente dans le domaine fissuré via :

$$(2.24) \quad \begin{cases} (u_I^h)_{p,q} = (v_I^h)_{p,q} & q \neq 0, (p,q) \in \mathbb{Z}^2 \\ (u_I^h)_{p,0} = (v_I^h)_{p,0} & p \leq 0 \\ (u_I^h)_{p,0^+} = (v_I^h)_{p,0} & p > 0 \\ (u_I^h)_{p,0^-} = (v_I^h)_{p,0} & p > 0 \end{cases}$$

On notera la «continuité» de l'onde incidente sur l'axe de la fissure : l'onde incidente a la même valeur aux nœuds situés de part et d'autre de la fissure :

$$(2.25) \quad (u_I^h)_{p,0^+} = (u_I^h)_{p,0^-}$$

Bien sûr, l'équation d'Helmholtz initiale n'est pas vérifiée sur la fissure, autrement dit :

$$-A_{h,\lambda} u_I^h + \omega^2 u_I^h \neq 0$$

De façon plus précise, si :

$$(2.26) \quad 2h g^h = -A_{h,\lambda} u_I^h + \omega^2 u_I^h$$

$g^h$  est une fonction discrète à support concentré sur la fissure au sens où :

$$(g^h)_{p,q} = 0 \quad \text{si } (p,q) \neq (p,o^+), (p,o^-), p > 0$$

(la notation  $2h g^h$  est choisie de telle sorte que  $g^h$  soit une approximation de  $\frac{\partial u^I}{\partial y}$  que nous avons notée  $g$  dans le cas continu).

Par linéarité, il est facile de voir que l'onde diffractée discrète est solution du problème non homogène :

$$(2.27) \quad \omega^2 u_D^h - A_{h,\lambda} u_D^h = -2h g^h$$

qui est l'équivalent discret de l'équation d'Helmholtz avec donnée de Neumann, non homogène.

Un calcul simple montre que  $g^h$  s'écrit sous la forme :

$$(2.28) \quad \begin{cases} (g^h)_{p,o^+} = \frac{1}{2h} ((1-\lambda) [(u_I^h)_{p+1,1} + (u_I^h)_{p-1,1} - (u_I^h)_{p-1,-1} - (u_I^h)_{p+1,-1}] \\ \quad + (2\lambda - 1) [(u_I^h)_{p,1} - (u_I^h)_{p,-1}]) \\ (g^h)_{p,o^-} = -(g^h)_{p,o^+} \end{cases}$$

$g^h$  est, en particulier, antisymétrique; Cette propriété se transmet naturellement au champ diffracté  $u_D^h$ ; on a :

$$(2.29) \quad \begin{cases} (u_D^h)_{p,q} = -(u_D^h)_{p,-q} & \forall q \neq 0 \\ (u_D^h)_{p,o} = 0 & \forall p \leq 0 \end{cases}$$

(On remarquera que le champ diffracté est, par construction, nul sur la pointe de la fissure, c'est-à-dire en  $(ph, qh) = (0, 0)$ ).

On introduit alors la restriction de  $u_D^h$  au demi-plan supérieur  $(R_p^2)^+$ , soit  $u^h$ , par :

$$(2.30) \quad \begin{cases} (u^h)_{p,q} = (u_D^h)_{p,q} & \text{si } p \in \mathbb{Z}, q > 0 \\ (u^h)_{p,0} = (u_D^h)_{p,0} & \text{si } p \leq 0 \\ (u^h)_{p,0} = (u_D^h)_{p^+,0} & \text{si } p > 0 \end{cases}$$

$u^h$  est solution du problème :

$$(2.31) \quad \omega^2 u^h - A_{h,\lambda}^+ u^h = -2h g^h$$

où on a noté  $A_{h,\lambda}^+$  l'opérateur borné de :

$$L^2((R_h^2)^+) = V^h \cap L^2((R^2)^+)$$

et qui est défini par :

$$(2.32) \quad \begin{cases} D(A_{h,\lambda}^+) = \left\{ \varphi \in V^h, (\gamma_o^h \varphi)(ph) = \varphi_{p,0} = 0, \forall p \leq 0 \right\} \\ (A_{h,\lambda}^+ \varphi)_{p,q} = (A_{h,\lambda} \varphi)_{p,q} = -(\Delta_{h,\lambda} \varphi)_{p,q} & \text{si } q > 0 \\ (A_{h,\lambda}^+ \varphi)_{p,0} = (A_{h,\lambda} \varphi)_{p,0} & \text{si } p \leq 0 \end{cases}$$

Nous avons donc ramené notre problème de diffraction à celui de la détermination de  $u^h$ .  $u^h$  est solution d'un problème mixte discret dans le sens où :

- $u^h$  vérifie l'équation d'Helmholtz discrète en chaque nœud  $(ph, qh)$  où  $q > 0$ ,
- $u^h(ph, qh = 0)$  est nulle pour tout  $p \leq 0$



- $u^h(p^h, q^h = 0)$  vérifie une équation particulière où intervient la donnée de bord  $g^h$ .

Bien sûr, comme c'est le cas en continu, la solution de (2.31) n'est pas unique. Ainsi, on convient de choisir la solution physiquement acceptable ou solution sortante, que l'on définit à l'aide du principe d'absorption limite :

$$(2.33) \quad u^h = \lim_{\varepsilon \downarrow 0^+} u^{\varepsilon, h}$$

où la solution amortie est définie de manière unique par :

$$(2.34) \quad (\omega^2 + i\varepsilon\omega) u^{\varepsilon, h} - A_{h, \lambda}^+ h^{\varepsilon, h} = -2h g^h$$

La section suivante est consacrée à l'étude des propriétés puis à la détermination de la fonction  $u^{\varepsilon, h}$ .

### 2.3. ANALYSE THEORIQUE DU PROBLEME DISCRET

Nous abordons, dans cette section, l'analyse théorique du problème discret. Nous avons essayé de construire l'exposé de façon analogue à ce que nous avons fait pour le cas continu. D'autre part, nous avons choisi, de rassembler en annexe tous les calculs (et ils sont nombreux !) et les détails techniques de manière à faire ressortir la logique de la démarche suivie.

Cette section est construite de la manière suivante : Après avoir obtenu des estimations a priori sur la solution discrète (théorème 1.1 de la section 2.1), nous commençons la construction de son expression explicite en définissant les transformées et demi-transformées de Fourier discrètes (paragraphe a). Celles-ci seront utilisées pour ramener le problème à celui de la détermination de la trace de la solution sur la fissure (définition du relèvement discret dans la proposition 2.2 du paragraphe b). L'écriture des équations de Wiener-Hopf discrètes (équations (2.6.3) ou (2.6.4)) est obtenue au paragraphe c. Sa résolution, menée au paragraphe e, nécessitera de construire au préalable une décomposition de Wiener-Hopf multiplicative discrète (Lemme 2.1 du paragraphe d). Le résultat principal que nous obtiendrons alors est contenu dans le théorème 2.2.

Enfin, nous donnerons au paragraphe f une expression plus explicite de la solution lorsque la donnée au bord est très régulière (théorème 2.3). A cette occasion, nous serons amenés à préciser la notion de décomposition de Wiener-Hopf additive.

Nous considérons donc le problème :

$$(2.35) \quad -A_{h,\lambda}^+ u^{\varepsilon,h} + (\omega^2 + i\varepsilon\omega) u^{\varepsilon,h} = -2h g^h$$

où  $g^h$  est une donnée de «bord», c'est-à-dire :

$$(2.36) \quad \left| \begin{array}{ll} (\Delta_{h,\lambda} u^{\varepsilon,h})_{p,q} + (\omega^2 + i\varepsilon\omega) u^{\varepsilon,h}_{p,q} = 0 & \text{pour } q \geq 1 \quad p \in \mathbb{Z} \\ (\gamma_o^h u^{\varepsilon,h})_p = 0 & \text{pour } p \leq 0 \\ (\gamma_o^h A_{h,\lambda} u^{\varepsilon,h})_p + (\omega^2 + i\varepsilon\omega) (\gamma_o^h u^{\varepsilon,h})_p = -2h g_p^h & \text{pour } p > 0 \end{array} \right.$$

Ce problème peut s'écrire encore plus explicitement en adoptant les notations :

$$(2.37) \quad \left| \begin{array}{l} a = 2\lambda - 1 \\ b = 1 - \lambda \\ c_h(\varepsilon) = \omega^2 h^2 + i\varepsilon\omega h^2 - 4\lambda \end{array} \right.$$

sous la forme :

$$(2.38) \quad \left| \begin{array}{l} c_h(\varepsilon) u^{\varepsilon,h}_{p,q} + a(u^{\varepsilon,h}_{p+1,q} + u^{\varepsilon,h}_{p,q+1} + u^{\varepsilon,h}_{p,q-1} + u^{\varepsilon,h}_{p-1,q}) \\ + b(u^{\varepsilon,h}_{p+1,q+1} + u^{\varepsilon,h}_{p-1,q+1} + u^{\varepsilon,h}_{p+1,q-1} + u^{\varepsilon,h}_{p-1,q-1}) = 0 \\ \forall p \in \mathbb{Z} \quad \forall q \in \{1, 2, \dots\} \end{array} \right.$$

$$(2.39) \quad u^{\varepsilon,h}_{p,0} = 0 \quad \forall p \in \{\dots, -2, -1, 0\}$$

$$(2.40) \quad \left| \begin{array}{l} c_h(\varepsilon) u^{\varepsilon,h}_{p,0} + a(u^{\varepsilon,h}_{p+1,0} + 2u^{\varepsilon,h}_{p,1} + u^{\varepsilon,h}_{p-1,0}) \\ + 2b(u^{\varepsilon,h}_{p+1,1} + u^{\varepsilon,h}_{p-1,1}) = -2h g_p^h \\ \forall p \in \{1, 2, \dots\} \end{array} \right.$$

### 2.3.1. Estimation a priori

Le but de cette sous-section est d'obtenir un résultat d'existence et d'unicité de la solution du problème (2.35). Puis, dans la section suivante, nous donnerons une

description de la méthode qui permet de construire cette solution. Nous faisons ici l'hypothèse :

$$(2.41) \quad g^h \in L^2(\mathbb{R}_h^+)$$

c'est-à-dire :

$$(2.42) \quad \sum_{p>0} |g_p^h|^2 h < +\infty$$

Nous avons alors l'équivalent du théorème 1.1.

Théorème 2.1. :

Sous l'hypothèse (2.41), le problème (2.35) admet une solution unique  $u^{\varepsilon,h}$  dans  $L^2((\mathbb{R}_h^2)^+)$ .

De plus, on a l'estimation a priori :

$$\left\{ \sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} h^2 |u_{pq}^{\varepsilon,h}|^2 + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{+\infty} h^2 |u_{p,0}^{\varepsilon,h}|^2 \right\}^{1/2} \leq \frac{2}{\varepsilon\omega} \sqrt{\frac{2}{h}} \left\{ \sum_{p=1}^{+\infty} h |g_p^h|^2 \right\}^{1/2}$$

soit, sous forme plus abstraite :

$$(2.43) \quad \|u^{\varepsilon,h}\|_{L^2((\mathbb{R}_h^2)^+)} \leq \frac{2}{\varepsilon\omega} \sqrt{\frac{2}{h}} \|g^h\|_{L^2(\mathbb{R}_h^+)}$$

Preuve :

Elle se construit d'une manière très similaire à ce que nous avons fait dans le cas continu. On commence par travailler formellement sur les équations pour établir l'estimation a priori puis on conclut par des méthodes classiques en analyse numérique (méthode de Galerkin).

Soit donc  $u^{\varepsilon,h}$  une solution de (2.38), (2.39) et (2.40). Supposons  $q \geq 1$  et  $p$  quelconque on a :

$$(\omega^2 + i\varepsilon\omega)h^2 u_{p,q}^{\varepsilon,h} - 4\lambda u_{p,q}^{\varepsilon,h} + (2\lambda - 1)(u_{p,q+1}^{\varepsilon,h} + u_{p,q-1}^{\varepsilon,h} + u_{p+1,q}^{\varepsilon,h} + u_{p-1,q}^{\varepsilon,h}) + (1 - \lambda)(u_{p+1,q+1}^{\varepsilon,h} + u_{p+1,q-1}^{\varepsilon,h} + u_{p-1,q+1}^{\varepsilon,h} + u_{p-1,q-1}^{\varepsilon,h}) = 0$$

Multiplions cette égalité  $\overline{u_{p,q}^{\varepsilon,h}}$  et sommons sur  $q$  variant de 1 à l'infini et sur  $p$  variant sur  $\mathbb{Z}$  ; il vient, après réarrangement des termes :

$$(2.44) \quad \left| \begin{aligned} & \sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left\{ |u_{p,q}^{\varepsilon,h}|^2 (\omega^2 h^2 + i\varepsilon\omega h^2) \right. \\ & \quad + (1 - \lambda)(u_{p+1,q+1}^{\varepsilon,h} - 2u_{p,q}^{\varepsilon,h} + u_{p-1,q-1}^{\varepsilon,h}) \overline{u_{p,q}^{\varepsilon,h}} \\ & \quad + (2\lambda - 1)(u_{p+1,q}^{\varepsilon,h} - 2u_{p,q}^{\varepsilon,h} + u_{p-1,q}^{\varepsilon,h}) \overline{u_{p,q}^{\varepsilon,h}} \\ & \quad + (2\lambda - 1)(u_{p,q+1}^{\varepsilon,h} - 2u_{p,q}^{\varepsilon,h} + u_{p,q-1}^{\varepsilon,h}) \overline{u_{p,q}^{\varepsilon,h}} \\ & \quad \left. + (1 - \lambda)(u_{p+1,q-1}^{\varepsilon,h} - 2u_{p,q}^{\varepsilon,h} + u_{p-1,q+1}^{\varepsilon,h}) \overline{u_{p,q}^{\varepsilon,h}} \right\} \\ & \quad \quad \quad = 0 \end{aligned} \right.$$

Utilisons les quatre identités :

$$\begin{aligned} & - \sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} [u_{p+1,q}^{\varepsilon,h} - 2u_{p,q}^{\varepsilon,h} + u_{p-1,q}^{\varepsilon,h}] u_{p,q}^{\varepsilon,h} \\ & = - \sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} |u_{p,q}^{\varepsilon,h} - u_{p+1,q}^{\varepsilon,h}|^2 \\ & - \sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} [u_{p,q+1}^{\varepsilon,h} - 2u_{p,q}^{\varepsilon,h} + u_{p,q-1}^{\varepsilon,h}] \overline{u_{p,q}^{\varepsilon,h}} \\ & = - \sum_{q=0}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} |u_{p,q+1}^{\varepsilon,h} - u_{p,q}^{\varepsilon,h}|^2 - \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \overline{u_{p,0}^{\varepsilon,h}} (u_{p,1}^{\varepsilon,h} - u_{p,0}^{\varepsilon,h}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} [u_{p+1,q+1}^{\varepsilon,h} - 2u_{p,q}^{\varepsilon,h} + u_{p-1,q-1}^{\varepsilon,h}] \overline{u_{p,q}^{\varepsilon,h}} \\
& = - \sum_{q=0}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} |u_{p+1,q+1}^{\varepsilon,h} - u_{p,q}^{\varepsilon,h}|^2 - \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \overline{u_{p,o}^{\varepsilon,h}} [u_{p+1,1}^{\varepsilon,h} - u_{p,o}^{\varepsilon,h}] \\
& - \sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} [u_{p+1,q-1}^{\varepsilon,h} - 2u_{p,q}^{\varepsilon,h} + u_{p-1,q+1}^{\varepsilon,h}] \overline{u_{p,q}^{\varepsilon,h}} \\
& = - \sum_{q=0}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} |u_{p+1,q-1}^{\varepsilon,h} - u_{p-1,q+1}^{\varepsilon,h}|^2 - \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \overline{u_{p,o}^{\varepsilon,h}} [u_{p-1,1}^{\varepsilon,h} - u_{p,o}^{\varepsilon,h}]
\end{aligned}$$

Nous obtenons, en ne retenant que la partie imaginaire de (2.44) :

$$\begin{aligned}
& \varepsilon \omega h^2 \sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} |u_{p,q}^{\varepsilon,h}|^2 - \text{Im} \left\{ (2\lambda - 1) \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \overline{u_{p,o}^{\varepsilon,h}} (u_{p,1}^{\varepsilon,h} - u_{p,o}^{\varepsilon,h}) \right. \\
& \left. + (1 - \lambda) \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \overline{u_{p,o}^{\varepsilon,h}} (u_{p+1,1}^{\varepsilon,h} - 2u_{p,o}^{\varepsilon,h} + u_{p-1,1}^{\varepsilon,h}) \right\} = 0
\end{aligned}$$

soit encore :

$$(2.45) \quad \left| \begin{aligned} & \varepsilon \omega h^2 \sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} |u_{p,q}^{\varepsilon,h}|^2 - \text{Im} \left\{ (2\lambda - 1) \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \overline{u_{p,o}^{\varepsilon,h}} u_{p,1}^{\varepsilon,h} \right. \\ & \left. + (1 - \lambda) \sum_{p=-\infty}^{+\infty} [u_{p+1,1}^{\varepsilon,h} + u_{p-1,1}^{\varepsilon,h}] \overline{u_{p,o}^{\varepsilon,h}} \right\} = 0 \end{aligned} \right.$$

Par ailleurs, si  $q = 0$ ,  $p > 0$  on peut écrire :

$$\begin{aligned}
& (\omega h^2 + i\varepsilon \omega h^2) u_{p,o}^{\varepsilon,h} - 4\lambda u_{p,o}^{\varepsilon,h} + 2(1 - \lambda) (u_{p+1,1}^{\varepsilon,h} + u_{p-1,1}^{\varepsilon,h}) \\
& + (2\lambda - 1) (u_{p+1,o}^{\varepsilon,h} + u_{p-1,o}^{\varepsilon,h}) = -2hg_p^h
\end{aligned}$$

Multiplions cette égalité par  $\overline{u_{p,o}^{\varepsilon,h}}$  et utilisons la condition :  $\{u_{p,o}^{\varepsilon,h} = 0 \text{ si } p \leq 0\}$  ;

on obtient :

$$(2.46) \quad \left| \begin{aligned} & \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \varepsilon \omega h^2 |u_{p,o}^{\varepsilon,h}|^2 + 2 \operatorname{Im} \left\{ (1-\lambda) \sum_{p=-\infty}^{+\infty} [u_{p+1,1}^{\varepsilon,h} + u_{p-1,1}^{\varepsilon,h}] \overline{u_{p,o}^{\varepsilon,h}} \right. \\ & \quad \left. + (2\lambda - 1) \sum_{p=-\infty}^{+\infty} [u_{p+1,o}^{\varepsilon,h} + u_{p-1,o}^{\varepsilon,h}] \overline{u_{p,o}^{\varepsilon,h}} \right\} \\ & = -2h \operatorname{Im} \left\{ \sum_{p=1}^{+\infty} g_p^h \overline{u_{p,o}^{\varepsilon,h}} \right\} \end{aligned} \right|$$

En combinant (2.45) et (2.46) on a encore :

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left\{ \sum_{q=1}^{+\infty} h^2 |u_{p,q}^{\varepsilon,h}|^2 + \frac{h^2}{2} |u_{p,o}^{\varepsilon,h}|^2 \right\} = -2h \frac{\operatorname{Im} \left\{ \sum_{p=1}^{+\infty} g_p^h \overline{u_{p,o}^{\varepsilon,h}} \right\}}{\varepsilon \omega}$$

d'où la majoration :

$$\begin{aligned} & \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left\{ \sum_{q=1}^{+\infty} h^2 |u_{p,q}^{\varepsilon,h}|^2 + \frac{h^2}{2} |u_{p,o}^{\varepsilon,h}|^2 \right\} \\ & \leq \frac{2h}{\varepsilon \omega} \left[ \sum_{p=1}^{+\infty} |g_p^h|^2 \right]^{1/2} \left[ \sum_{p=1}^{+\infty} |u_{p,o}^{\varepsilon,h}|^2 \right]^{1/2} \end{aligned}$$

soit encore, en majorant le dernier terme de l'inégalité :

$$\begin{aligned} & \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left\{ \sum_{q=1}^{+\infty} h^2 |u_{p,q}^{\varepsilon,h}|^2 + \frac{h^2}{2} |u_{p,o}^{\varepsilon,h}|^2 \right\}^{1/2} \\ & \leq \frac{2\sqrt{2}}{\varepsilon \omega \sqrt{h}} \left[ \sum_{p=1}^{+\infty} |g_p^h|^2 h \right]^{1/2} \end{aligned}$$

c'est l'égalité recherchée  $\square$ .

**Remarque :** On notera que la constante intervenant ci-dessus explose quant  $h$  tend vers 0. En travaillant un peu plus (de manière similaire à ce

que nous avons fait dans la deuxième partie de la démonstration du théorème 1.1), nous pourrions obtenir un résultat plus fin, analogue à celui du cas continu.

Cette majoration nous permet de conclure à l'unicité de la solution, si celle-ci existe. L'existence de la solution peut se montrer de manière très classique en suivant la démarche :

i) Considérer le problème «tronqué» :

$$-\left\{\Delta_h u_K^{\varepsilon,h}\right\}_{p,q} + (\omega^2 + i\varepsilon\omega) (u_K^{\varepsilon,h})_{p,q} = 0$$

pour  $-K < p < K$  ,  $1 \leq q < K$

$$-(\gamma_o u_K^{\varepsilon,h})_p = 0 \quad \text{pour } -K < p \leq 0$$

$$-(\gamma_o A_h u_K^{\varepsilon,h})_p + (\omega^2 + i\varepsilon\omega) (\gamma_o u_K^{\varepsilon,h})_p = -2h g_p^h$$

pour  $0 < p < K$

$$-(u_K^{\varepsilon,h})_{p,q} = 0 \quad \text{pour } |p| \geq k \text{ ou } |q| \geq K$$

ii) Etablir, de la même manière que précédemment, la majoration :

$$||u_K^{\varepsilon,h}||_{L^2((R_h^2)^+)} \leq C ||g^h||_{L^2(R_h^+)}$$

iii) Utiliser le fait que le problème précédent est de dimension finie pour conclure à l'existence de  $u_K^{\varepsilon,h}$ .

iv) Raisonner par passage à la limite ( $K \rightarrow +\infty$ )

$$\lim_{K \rightarrow +\infty} u_K^{\varepsilon,h} = u^{\varepsilon,h} \text{ dans } L^2((R_h^2)^+)$$

Nous ne détaillerons pas ici ce procédé (d'ailleurs très classique) puisque nous construirons de manière explicite, dans les sections suivantes, la solution de  $u^{\varepsilon,h}$ .



### 2.3.2. Construction de la solution

#### a) Transformée et demi-transformée de Fourier discrète

Soit  $c^h$  un élément de  $L^2(\mathbb{R}_h)$ . On définit sa transformée de Fourier :

$$(2.47) \quad Fc^h(k) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \text{L.i.m.} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_n^h \exp - inhk$$

$Fc^h$  est alors élément de  $L^2\left(-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right)$  ensemble des fonctions de carrés sommables,  $\frac{2\pi}{h}$  périodiques.

On peut, bien sûr, reconstituer  $c^h$  à l'aide de sa transformée de Fourier : c'est la synthèse de Fourier :

$$(2.48) \quad c(h,n) = c_n^h = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \text{L.i.m.} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} Fc^h(k) \exp inhk dk$$

Nous utiliserons également la notion de demi-transformée de Fourier :

Si  $c^h$  est élément de  $L^2(\mathbb{R}_h)$  on pose :

$$(2.49) \quad \left| \begin{array}{l} (F^+ \cdot c^h)(k) = F(\Pi_h^+ \cdot c^h)(k) \\ (F^- \cdot c^h)(k) = F(\Pi_h^- \cdot c^h)(k) \end{array} \right.$$

où, nous avons défini  $\Pi_h^+$  et  $\Pi_h^-$  comme les projecteurs de  $L^2(\mathbb{R}_h)$ .

$$(2.50) \quad \left| \begin{array}{l} (\Pi_h^+ c^h)_n = c_n^h \quad \text{si } n > 0 \\ (\Pi_h^+ c^h)_n = 0 \quad \text{si } n \leq 0 \end{array} \right.$$

$$(2.50) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\Pi_h^+ c)_n = c_n^h \quad \text{si } n > 0 \\ (\Pi_h^+ c)_n = 0 \quad \text{si } n \leq 0 \end{array} \right.$$

$$(2.51) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\Pi_h^- c)_n = 0 \quad \text{si } n > 0 \\ (\Pi_h^- c)_n = c_n^h \quad \text{si } n \leq 0 \end{array} \right.$$

$F_h^+ c^h$  et  $F_h^- c^h$  sont également des fonctions de  $L^2\left[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right]$ . Leurs propriétés remarquables sont résumées dans la proposition suivante :

Proposition 2.1. :

Si  $c^h \in l^2(\mathbb{R}_h)$ , la fonction  $F^+(z) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \sum_{n=1}^{+\infty} h c_n^h \exp -ihkn$

est définie sur l'ensemble

$$P^- = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z < 0\}$$

où elle est  $\frac{2\pi}{h}$  périodique et où elle admet le comportement asymptotique :

$$F^+(z) \sim \frac{h c_1}{(2\pi)^{1/2}} \exp -ihz \quad \text{Im } z \rightarrow -\infty$$

De plus, on a l'égalité :

$$F_h^+ c^h(k) = \lim_{\tau \rightarrow 0^-} F^+(k + i\tau) \quad \text{dans } L^2\left(-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right)$$

De même la fonction :

$$F^-(z) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \sum_{n=-\infty}^0 h c_n^h \exp -ihkn$$

est définie analytique sur l'ensemble :

$$P^- = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z < 0 \}$$

où elle est  $\frac{2\pi}{h}$  périodique et où elle admet le comportement asymptotique :

$$F^-(z) \sim \frac{h}{(2\pi)^{1/2}} \{ c_0^h + c_{-1}^h \exp ihz \} \quad \operatorname{Im} z \rightarrow +\infty$$

De plus, on a l'égalité :

$$F_h^- c^h(k) = \lim_{\tau \rightarrow 0^+} F(k + i\tau) \text{ dans } L^2\left(-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right)$$

Dans toute la suite on utilisera la même notation pour désigner  $F_h^+ c^h$  et  $F^+$  (respectivement  $F_h^- c^h$  et  $F^-$ ). On pourra alors écrire l'égalité :

$$F_h c^h(k) = F_h^+ c^h(k) + F_h^- c^h(k) \text{ dans } L^2\left(-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right)$$

avec	$F_h^+ c^h(z) \text{ analytique sur } P^-$ $F_h^- c^h(z) \text{ analytique sur } P^+$
------	---

Preuve de la proposition :

Elle repose sur le caractère sommable des séries définissant  $F^+$  et  $F^-$  et des convergences :

$$e^{-n\pi} c_n^h 1_{\{n>0\}} \rightarrow c_n^h 1_{\{n>0\}} \text{ dans } L^2(\mathbb{R}_h)$$

$$e^{-n\pi} c_n^h 1_{\{n \leq 0\}} \rightarrow c_n^h 1_{\{n \leq 0\}} \text{ dans } L^2(\mathbb{R}_h)$$

b) Première réduction du problème :

Par analogie au cas continu, cette phase consiste à intégrer l'équation (2.38) en  $y = qh$ , une relation de recurrence se substituant à l'équation différentielle du cas continu.

Pour cela, on commence par effectuer une transformation de Fourier dans la direction  $x : ph$ .

$$(2.52) \quad F_h : L^2((R_h^2)^+) \rightarrow L^2\left(-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h} ; L^2(R_h^+)\right)$$

$$u^{\varepsilon, h} \rightarrow \hat{u}^{\varepsilon, h}(k, y) = (F_h u^{\varepsilon, h})(k, y)$$

soit (en posant  $\hat{u}_q^{\varepsilon, h}(k) = \hat{u}^{\varepsilon, h}(k, y)$  pour  $y = qh$ ) :

$$\hat{u}_q^{\varepsilon, h}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \text{L.i.m.} \left( \sum_p u_{p,q}^{\varepsilon, h} \exp - iphk \right)$$

Il est bien connu que  $F_h$  est une isométrie ; on l'utilise pour transporter les équations aux différences dans le plan de Fourier.

Nous commençons par transformer les équations (2.38) ; pratiquement cela revient à multiplier cette équation par  $\exp - iphk$  et à sommer sur  $p$ . Il vient :

$$\begin{aligned} c_h(\varepsilon) & \sum_{p=-\infty}^{+\infty} h u_{p,q}^{\varepsilon, h} \exp - iphk + a \sum_{p=-\infty}^{+\infty} h u_{p+1,q}^{\varepsilon, h} \exp - iphk \\ & + a \sum_{p=-\infty}^{+\infty} h u_{p,q+1}^{\varepsilon, h} \exp - iphk + a \sum_{p=-\infty}^{+\infty} h u_{p,q-1}^{\varepsilon, h} \exp - iphk \\ & + a \sum_{p=-\infty}^{+\infty} h u_{p-1,q}^{\varepsilon, h} \exp - iphk + b \sum_{p=-\infty}^{+\infty} h u_{p+1,q+1}^{\varepsilon, h} \exp - iphk \\ & + b \sum_{p=-\infty}^{+\infty} h u_{p+1,q-1}^{\varepsilon, h} \exp - iphk + b \sum_{p=-\infty}^{+\infty} h u_{p-1,q+1}^{\varepsilon, h} \exp - iphk \\ & + b \sum_{p=-\infty}^{+\infty} h u_{p-1,q-1}^{\varepsilon, h} \exp - iphk = 0 \end{aligned}$$

soit encore, en utilisant :

$$\begin{aligned}\sum_{p=-\infty}^{+\infty} h u_{p-1,q}^{\varepsilon,h} \exp -iphk &= \exp -ihk \sum_{p=-\infty}^{+\infty} h u_{p,q}^{\varepsilon,h} \exp -iphk \\ \sum_{p=-\infty}^{+\infty} h u_{p+1,q}^{\varepsilon,h} \exp -iphk &= \exp +ihk \sum_{p=-\infty}^{+\infty} h u_{p,q}^{\varepsilon,h} \exp -iphk\end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}(a + 2b \cos hk) (\hat{u}_{q+1}^{\varepsilon,h}(k) + \hat{u}_{q-1}^{\varepsilon,h}(k)) \\ + (c_h(\varepsilon) + 2a \cos hk) \hat{u}_q^{\varepsilon,h}(k) = 0\end{aligned}$$

ou, de manière équivalente :

$$(2.53) \quad \left| \begin{aligned} (2\lambda - 1 + 2(1 - \lambda) \cos hk) (\hat{u}_{q+1}^{\varepsilon,h}(k) + \hat{u}_{q-1}^{\varepsilon,h}(k)) \\ + (\omega^2 h^2 + i\varepsilon\omega h - 4\lambda + 2(2\lambda - 1) \cos hk) \hat{u}_q^{\varepsilon,h}(k) = 0 \end{aligned} \right|$$

(2.53) est, pour presque tout  $k$ , une équation ou recurrence du second ordre, son polynôme caractéristique est donné par :

$$(2.54) \quad (a + 2b \cos hk) r^2 + (c_h(\varepsilon) + 2a \cos hk)r + (a + 2b \cos hk) = 0$$

Les deux racines de (2.54) s'écrivent :

$$(2.55) \quad \left| \begin{aligned} r_1^{\varepsilon,h}(k) &= \exp ih\varphi_{\varepsilon,h}(k) \\ r_2^{\varepsilon,h}(k) &= \exp -ih\varphi_{\varepsilon,h}(k) \end{aligned} \right|$$

où  $\varphi_{\varepsilon,h}(k)$  est un complexe vérifiant :

$$(2.56) \quad \cos h\varphi_{\varepsilon,h}(k) = -\frac{c_h(\varepsilon) + 2a \cos hk}{2(a + 2b \cos hk)}$$

On remarque que (2.56) n'est autre que la relation de dispersion des ondes planes numériques dans un milieu dissipatif :  $(k, \varphi_{\varepsilon, h}(k))$  est une paramétrisation de la courbe de dispersion.

Afin de choisir une détermination de  $\varphi_{\varepsilon, h}(k)$  remarquons que si  $\varepsilon > 0$ , nécessairement  $\varphi_{\varepsilon, h}(k)$  ne peut être réel (cf. Lemmes A1.1 et A1.2 de l'annexe A.1). nous conviendrons de choisir  $\varphi_{\varepsilon, h}(k)$  tel que :

$$\left| \begin{array}{l} \operatorname{Im} \varphi_{\varepsilon, h}(k) > 0 \\ \text{Réelle } \varphi_{\varepsilon, h}(k) \in \left[ -\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h} \right] \end{array} \right.$$

Ceci posé, nous pouvons intégrer notre équation sous la forme :

$$\hat{u}_q^{\varepsilon, h}(k) = A(k) \exp i q \varphi_{\varepsilon, h}(k) + B(k) \exp -i q \varphi_{\varepsilon, h}(k)$$

Comme nous ne pouvons retenir des solutions explosant à l'infini, nécessairement :

$$B(k) = 0$$

d'où :

$$(2.57) \quad \hat{u}_q^{\varepsilon, h}(k) = \hat{u}_q^{\varepsilon, h}(k) \exp (i q \varphi_{\varepsilon, h}(k))$$

Cette formule permet de construire l'équivalent discret  $R_{\varepsilon, h}$  du relèvement  $R_\varepsilon$  du cas continu en considérant le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
R_{\varepsilon,h} : L^2(R_h) & \longrightarrow & L^2((R_h^2)^+) \\
v^h & \longrightarrow & R_{\varepsilon,h} v^h \\
\downarrow F_h & & \uparrow F_h^{-1} \\
R_{\varepsilon,h} : L^2\left(-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right) & \longrightarrow & L^2\left(-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}, L^2(R_h^+)\right) \\
v^h(k) & \longrightarrow & R_{\varepsilon,h} v^h(k) = \exp(iq\varphi_{\varepsilon,h}(k)h) v^h(k)
\end{array}$$

On a alors la proposition :

Proposition 2.2 :

Le relèvement  $R_{\varepsilon,h}$  défini par :

$$(2.58) \quad F_h(R_{\varepsilon,h} v^h)(k) = \exp[iq h \varphi_{\varepsilon,h}(k)] F_h v_h(k)$$

est continu de  $L^2(R_h)$  dans  $L^2((R_h^2)^+)$

et on a l'estimation :

$$(2.59) \quad ||R_{\varepsilon,h} v^h||_{L^2((R_h^2)^+)}^2 \leq \sup_k \left[ \frac{h}{2th(h\varphi_{\varepsilon,h}(k))} \right]^{1/2} ||v^h||_{L^2(R_h)}^2$$

Démonstration : il suffit d'écrire les égalités :

$$\begin{aligned}
||R_{\varepsilon,h} v^h||_{L^2((R_h^2)^+)}^2 &= h^2 \sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} (R_{\varepsilon,h} v^h)_{p,q}^2 + \frac{h^2}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} |v^h|_p^2 \\
&= h \sum_{q=1}^{+\infty} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} |F_h v^h(k)|^2 \exp(-2h \operatorname{Im} \varphi_{\varepsilon,h}(k) q) dk + \frac{h}{2} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} |F_h v^h(k)|^2 dk
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= h \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} \frac{1 + \exp - 2h \operatorname{Im} \varphi_{\varepsilon,h}(k)}{2 (1 - \exp - 2h \operatorname{Im} \varphi_{\varepsilon,h}(k))} |\hat{v}_h(k)|^2 dk \\
&\leq \sup_k \left[ \frac{h}{2 \operatorname{th} (h \varphi_{\varepsilon,h}(k))} \right] \cdot ||v^h||_{L^2(R_h)}^2
\end{aligned}$$

Nous avons donc ramené notre problème à la détermination de la trace de la solution sur la fissure :



c) L'équation de Wiener-Hopf

Afin de calculer la transformée de Fourier de la trace de la solution discrète sur la frontière, les conditions aux limites sont utilisées pour obtenir une relation liant  $\hat{u}_0^{\varepsilon,h+}$  et  $\hat{u}_1^{\varepsilon,h-}$ . On aboutit à une équation de Wiener Hopf que l'on résout par des méthodes classiques.

Transformons par Fourier l'équation (2.40) : pratiquement, cela revient à multiplier l'équation par  $\exp - iphk$  et à sommer sur  $p \geq 1$  ; il vient :

$$\left| \begin{aligned} & c_h(\varepsilon) \sum_{p=1}^{+\infty} u_{p,0}^{\varepsilon,h} \exp - iphk + 2a \sum_{p=1}^{+\infty} u_{p,1}^{\varepsilon,h} \exp - iphk \\ & + a \left( \sum_{p=1}^{+\infty} u_{p+1,0}^{\varepsilon,h} \exp - iphk \right) + a \left( \sum_{p=1}^{+\infty} u_{p-1,0}^{\varepsilon,h} \exp - iphk \right) \\ & + 2b \left( \sum_{p=1}^{+\infty} u_{p+1,1}^{\varepsilon,h} \exp - iphk \right) + 2b \left( \sum_{p=1}^{+\infty} u_{p-1,1}^{\varepsilon,h} \exp - iphk \right) \\ & = -2h \sum_{p=1}^{+\infty} g_p^h \exp - iphk \end{aligned} \right.$$

Utilisons les formules d'intégration par parties discrètes :

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{+\infty} u_{p+1,0}^{\varepsilon,h} \exp - iphk &= \exp ikh \left\{ \sum_{p=1}^{+\infty} u_{p,0}^{\varepsilon,h} \exp - iphk \right\} - u_{1,0}^{\varepsilon,h} \\ \sum_{p=1}^{+\infty} u_{p+1,1}^{\varepsilon,h} \exp - iphk &= \exp ikh \left\{ \sum_{p=1}^{+\infty} u_{p,1}^{\varepsilon,h} \exp - iphk \right\} - u_{1,1}^{\varepsilon,h} \\ \sum_{p=1}^{+\infty} u_{p-1,0}^{\varepsilon,h} \exp - iphk &= \exp - iphk \left\{ \sum_{p=1}^{+\infty} u_{p,0}^{\varepsilon,h} \exp - iphk \right\} + u_{0,0}^{\varepsilon,h} \exp - iphk \\ \sum_{p=1}^{+\infty} u_{p-1,1}^{\varepsilon,h} \exp - iphk &= \exp - iphk \left\{ \sum_{p=1}^{+\infty} u_{p,1}^{\varepsilon,h} \exp - iphk \right\} + u_{0,1}^{\varepsilon,h} \exp - iphk \end{aligned}$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned} & (c_h(\varepsilon) + 2a \cos kh) \hat{u}_0^{\varepsilon,h+}(k) + 2(a + 2b \cos kh) \hat{u}_1^{\varepsilon,h-}(k) \\ & + \frac{h}{(2\pi)^{1/2}} \left\{ 2b u_{0,1}^{\varepsilon,h} \exp - ikh - a u_{1,0}^{\varepsilon,h} - 2b u_{1,1}^{\varepsilon,h} \right\} = -2h F_h^+ g_h \end{aligned}$$

Utilisons les relations :

$$\left| \begin{array}{l} \hat{u}_0^{\varepsilon,h+}(k) = \hat{u}_0^{\varepsilon,h}(k) \quad (\hat{u}_{0,p}^{\varepsilon,h} = 0 \text{ pour } p \leq 0) \\ \hat{u}_1^{\varepsilon,h+}(k) = \hat{u}_1^{\varepsilon,h}(k) - \hat{u}_1^{\varepsilon,h-}(k) \\ \quad = \exp i h \varphi_{\varepsilon,h}(k) \hat{u}_0^{\varepsilon,h+}(k) - \hat{u}_1^{\varepsilon,h-}(k) \end{array} \right.$$

et remarquons que l'on a :

$$\begin{aligned} c_h(\varepsilon) + 2a \cos kh + 2(a + 2b \cos kh) \exp i h \varphi_{\varepsilon,h}(k) \\ = (a + 2b \cos kh) (\exp i h \varphi_{\varepsilon,h}(k) - \exp -i h \varphi_{\varepsilon,h}(k)) \end{aligned}$$

Nous aboutissons à l'équation :

$$(2.60) \quad \left| \begin{array}{l} 2i(a + 2b \cos kh) \sin \varphi_{\varepsilon,h}(k) h \hat{u}_0^{\varepsilon,h+}(k) \\ - 2(a + 2b \cos kh) \hat{u}_1^{\varepsilon,h-}(k) \\ + \frac{h}{(2\pi)^{1/2}} \{ 2b u_{0,1}^{\varepsilon,h} \exp -ikh - a u_{1,0}^{\varepsilon,h} - 2b u_{1,1}^{\varepsilon,h} \} \end{array} \right. = -2h F_h^+ g_h(k)$$

(2.60) est l'équation recherchée, c'est-à-dire une équation reliant les transformées de Fourier de suites causales (i.e. nulles pour  $ph \leq 0$ ) et anticausales (i.e. nulles pour  $ph > 0$ ). Notons toutefois que le parallèle avec le cas continu (équation (1.1)) n'est pas immédiat. Pour le mettre en évidence, nous allons travailler encore un peu sur l'équation et introduire un opérateur «dérivée normale en  $\left(qh = \frac{h}{2}\right)$  discret» dont la définition quoique un peu artificielle permet de faire le lien avec le cas continu.

Nous partons de l'égalité :

$$\begin{aligned}
& 2(a + 2b \cos kh) \sum_{p=-\infty}^0 u_{p,1}^{\varepsilon,h} \exp - ikph \\
& = 2 \sum_{p=-\infty}^0 \left[ b u_{p+1,1}^{\varepsilon,h} + a u_{p,1}^{\varepsilon,h} + b u_{p-1,1}^{\varepsilon,h} \right] \exp - ikph \\
& \quad + 2b u_{0,1}^{\varepsilon,h} \exp - ikh - 2b u_{1,1}^{\varepsilon,h}
\end{aligned}$$

Choisissons  $\xi$  réel et utilisons la propriété de causalité de  $u_{0,1}^{\varepsilon,h}$ . On a :

$$\begin{aligned}
& 2(a + 2b \cos kh) \sum_{p=-\infty}^0 u_{p,1}^{\varepsilon,h} \exp - ikph \\
& = 2h \sum_{p=-\infty}^0 \frac{1}{h} \left\{ \left[ b u_{p+1,1}^{\varepsilon,h} + a u_{p,1}^{\varepsilon,h} + b u_{p-1,1}^{\varepsilon,h} \right] - \left[ \xi u_{p+1,0}^{\varepsilon,h} + (1-2\xi) u_{p,0}^{\varepsilon,h} + \xi u_{p-1,0}^{\varepsilon,h} \right] \right\} \exp - ihph \\
& \quad + 2\xi u_{1,0}^{\varepsilon,h} + 2b u_{0,1}^{\varepsilon,h} \exp - ikh - 2b u_{1,1}^{\varepsilon,h}
\end{aligned}$$

Le choix  $\xi = -\frac{a}{2} = \frac{1}{2} - \lambda$  permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
& -2(a + 2b \cos kh) u_1^{\varepsilon,h}(k) + \frac{h}{(2\pi)^{1/2}} \left\{ 2b u_{0,1}^{\varepsilon,h} \exp - ikh - a u_{1,0}^{\varepsilon,h} - 2b u_{1,1}^{\varepsilon,h} \right\} \\
& = \frac{-2h}{(2\pi)^{1/2}} \sum_{p=-\infty}^0 \frac{1}{h} \left\{ \left[ b u_{p+1,1}^{\varepsilon,h} + a u_{p,1}^{\varepsilon,h} + b u_{p-1,1}^{\varepsilon,h} \right] \right. \\
& \quad \left. - \left[ -\frac{a}{2} u_{p+1,0}^{\varepsilon,h} + (1+a) u_{p,0}^{\varepsilon,h} - \frac{a}{2} u_{p-1,0}^{\varepsilon,h} \right] \right\} \exp - iphk
\end{aligned}$$

D'où l'idée d'introduire les opérateurs de trace discrets suivants :

$$\begin{aligned}
(\gamma_0^h, \partial_n^h) : L^2((R_h^2)^+) & \longrightarrow L^2(R_h) \times L^2(R_h) \\
v^h & \longrightarrow (\gamma_0^h v^h, \partial_n^h v^h)
\end{aligned}$$

avec :

$$(2.61) \quad \begin{cases} (\gamma_o^h v^h)_p = v_{p,0}^h \\ (\partial_n^h v^h)_p = \frac{1}{h} \left\{ (1-\lambda) v_{p+1,1}^h + (2\lambda-1) v_{p,1}^h + (1-\lambda) v_{p-1,1}^h \right. \\ \quad \left. - \left[ \left( \frac{1}{2} - \lambda \right) v_{p+1,0}^h + 2\lambda v_{p,0}^h + \left( \frac{1}{2} - \lambda \right) v_{p-1,0}^h \right] \right\} \end{cases}$$

$\partial_n^h$  est un équivalent discret, précis à l'ordre 2, de la dérivée normale sur l'axe  $y = \frac{h}{2}$ .

Définissons la fonction :

$$(2.61) \quad \gamma_{\varepsilon,h}(k) = \frac{-i}{h} (a + 2b \cos kh) \sin(\varphi_{\varepsilon,h}(k)h)$$

L'équation (2.59) se réécrit sous la forme :

$$(2.63) \quad \gamma_{\varepsilon,h}(k) \gamma_o^h F_h^+ u^{\varepsilon,h}(k) + F_h^- \partial_n^h u^{\varepsilon,h}(k) = F_h^+ g^h$$

C'est l'équation de Wiener Hopf recherchée.

De même que dans le cas continu, on peut introduire l'opérateur  $T_{\varepsilon,h}$  défini par :

$$\begin{array}{ccc} T_{\varepsilon,h} : L^2(\mathbb{R}_h) & \xrightarrow{\quad} & L^2(\mathbb{R}_h) \\ u^h & \xrightarrow{\quad} & T_{\varepsilon,h} \cdot u^h \\ \downarrow F_h & & \uparrow F_h^{-1} \\ \hat{T}_{\varepsilon,h} : L^2\left(-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right) & \xrightarrow{\quad} & L^2\left(-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right) \\ \hat{u}^h & \xrightarrow{\quad} & \hat{T}_{\varepsilon,h} \hat{u}^h = \gamma_{\varepsilon,h}(k) \hat{u}^h(k) \end{array}$$

et écrire l'équation (2.62) sous la forme :

$$(2.64) \quad T_{\varepsilon,h} \circ \Pi_h^+ \cdot \gamma_o^h u^{\varepsilon,h} + \Pi_h^- \cdot \partial_n^h u^{\varepsilon,h} = g^h$$

C'est l'équation de Wiener Hopf fonctionnelle discrète.

d) Décomposition de Wiener Hopf multiplicative de l'opérateur  $T_{\varepsilon,h}$

Nous allons à présent donner une décomposition de l'opérateur  $T_{\varepsilon,h}$  sous la forme :

$$(2.65) \quad T_{\varepsilon,h} = T_{\varepsilon,h}^+ \circ T_{\varepsilon,h}^-$$

où :

$$\left| \begin{array}{l} T_{\varepsilon,h}^+ \in L(L^2(\mathbb{R}_h), L^2(\mathbb{R}_h)) \\ T_{\varepsilon,h}^- \in L(L^2(\mathbb{R}_h), L^2(\mathbb{R}_h)) \end{array} \right.$$

qui va être l'équivalent de la décomposition multiplicative du cas continu.

Pour cela, il nous faut décomposer la fonction  $\gamma_{\varepsilon,h}$  sous la forme d'un produit de deux fonctions  $\gamma_{\varepsilon,h}^+$  et  $\gamma_{\varepsilon,h}^-$  l'une étant définie analytique, bornée à l'infini,  $\frac{2\pi}{h}$  périodique sur le demi-plan  $P^-$ , l'autre sur le demi-plan  $P^+$ .

Pour cela, considérons :

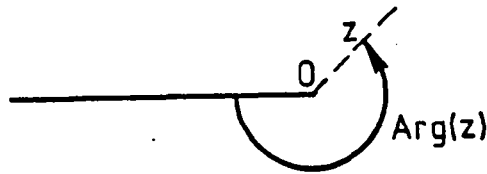
-  $\varphi_{\varepsilon,h}(o)$  la solution de :

$$(2.66) \quad \begin{cases} \cos(\varphi_{\varepsilon,h}(0)h) = 1 - (\omega^2 + i\varepsilon\omega) \frac{h^2}{2} \\ \operatorname{Im} \varphi_{\varepsilon,h}(0) > 0, \text{ Réelle } \varphi_{\varepsilon,h}(0) \in \left[0, \frac{\pi}{h}\right] \end{cases}$$

$\varphi_{\varepsilon,h}\left(\frac{\pi}{h}\right)$  la solution de :

$$(2.67) \quad \begin{cases} \cos\left(\varphi_{\varepsilon,h}\left(\frac{\pi}{h}\right)h\right) = \frac{-1}{4\lambda - 3} \left[ (\omega^2 + i\varepsilon\omega) \frac{h^2}{2} - 4\lambda + 1 \right] \\ \operatorname{Im} \varphi_{\varepsilon,h}\left(\frac{\pi}{h}\right) > 0, \text{ Réelle } \varphi_{\varepsilon,h}\left(\frac{\pi}{h}\right) \in \left[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right] \end{cases}$$

Définissons  $(z)^{1/2}$  en coupant le plan complexe de la demi-droite des réels négatifs et en choisissant la détermination principale du logarithme :



Posons :

$$(2.68) \quad \begin{cases} \gamma_{\varepsilon,h}^+(z) = \rho_h \exp -\frac{ih}{4} \left[ \varphi_{\varepsilon,h}(0) + \varphi_{\varepsilon,h}\left(\frac{\pi}{h}\right) \right] \cdot [1 - \exp ih(\varphi_{\varepsilon,h}(0) - z)]^{1/2} \\ \quad \cdot \left[ 1 - \exp ih\left(\varphi_{\varepsilon,h}\left(\frac{\pi}{h}\right) - z\right) \right]^{1/2} \end{cases}$$

$$(2.69) \quad \left\{ \begin{aligned} \gamma_{\varepsilon,h}^-(z) &= i\rho_h \exp -\frac{ih}{4} \left[ \varphi_{\varepsilon,h}(0) + \varphi_{\varepsilon,h}\left(\frac{\pi}{h}\right) \right] \cdot [1 - \exp ih (\varphi_{\varepsilon,h}(0) + z)]^{1/2} \\ &\quad \cdot \left[ 1 - \exp ih \left( \varphi_{\varepsilon,h}\left(\frac{\pi}{h}\right) + z \right) \right]^{1/2} \end{aligned} \right.$$

avec :

$$(2.70) \quad \begin{aligned} \rho_h &= \frac{|4\lambda - 3|^{1/4}}{(2h)^{1/2}} e^{-i\frac{\pi}{4}} & \text{si } \lambda \geq \frac{3}{4} \\ \rho_h &= \frac{|4\lambda - 3|^{1/4}}{(2h)^{1/2}} e^{-i\frac{\pi}{2}} & \text{si } \frac{1}{2} < \lambda < \frac{3}{4} \end{aligned}$$

On a alors le lemme suivant :

#### Lemme 2.1 (une décomposition)

Il existe  $\tau_h(\varepsilon) > 0$  tel que :

-  $\gamma_{\varepsilon,h}^+(z)$  est analytique ,  $\frac{2\pi}{h}$  périodique , non nulle sur le demi-plan :

$$P_{\varepsilon,h}^+ = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z < \frac{\tau_h(\varepsilon)}{h} \right\}$$

-  $\gamma_{\varepsilon,h}^-(z)$  est analytique ,  $\frac{2\pi}{h}$  périodique, non nulle sur le demi-plan :

$$P_{\varepsilon,h}^- = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > -\frac{\tau_h(\varepsilon)}{h} \right\}$$

-  $\gamma_{\varepsilon,h}^+(z) \sim \text{Cte} \quad \operatorname{Im} z \rightarrow -\infty$

-  $\gamma_{\varepsilon,h}^-(z) \sim \text{Cte} \quad \operatorname{Im} z \rightarrow +\infty$

de plus, on a l'égalité :

$$(2.71) \quad \gamma_{\varepsilon,h}(z) = \gamma_{\varepsilon,h}^+(z) \gamma_{\varepsilon,h}^-(z)$$

pour tout  $z$  de la bande :

$$B_{\varepsilon,h} = P_{\varepsilon,h}^+ \cap P_{\varepsilon,h}^-$$

ainsi que les développements asymptotiques :

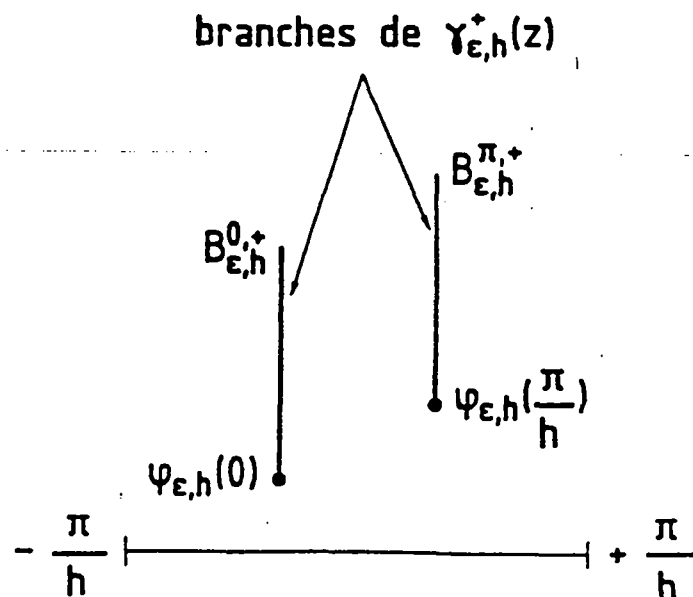
$$(2.72) \quad \begin{cases} \gamma_{\varepsilon,h}^+(k) - \gamma_{\varepsilon}^+(k) = o(h) \\ \gamma_{\varepsilon,h}^-(k) - \gamma_{\varepsilon}^-(k) = o(h) \\ \gamma_{\varepsilon,h}(k) - \gamma_{\varepsilon}(k) = o(h^2) \end{cases}$$

La démonstration de ce lemme est un peu longue et technique, nous avons choisi de la rejeter en annexe.

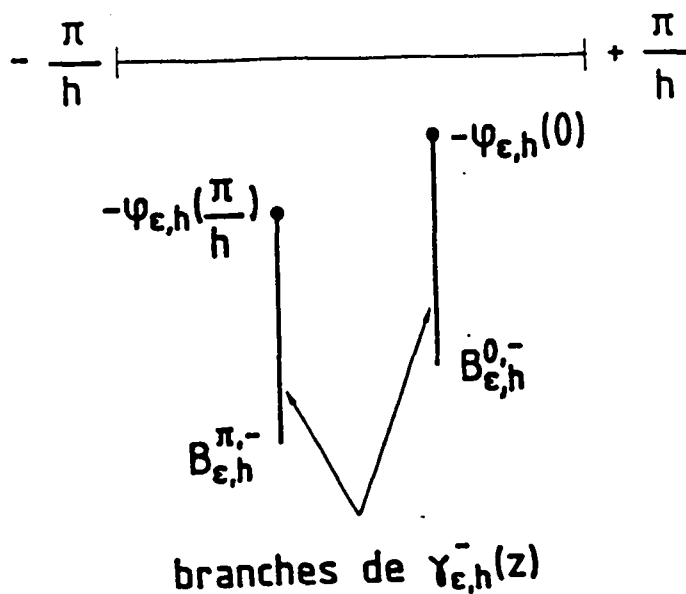
D'autre part, on trouvera dans cette annexe une description des singularités des fonctions  $\gamma_{\varepsilon,h}^+$  et  $\gamma_{\varepsilon,h}^-$ . Celles-ci consistent notamment, pour chacune des deux fonctions, en deux familles de branches issues des points :

$$\begin{cases} +\varphi_{\varepsilon,h}(0) + \frac{2\pi}{h} Z & \text{pour } \gamma_{\varepsilon,h}^+ \\ +\varphi_{\varepsilon,h}\left(\frac{\pi}{h}\right) + \frac{2\pi}{h} Z \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\varphi_{\varepsilon,h}(0) + \frac{2\pi}{h} Z & \text{pour } \gamma_{\varepsilon,h}^- \\ -\varphi_{\varepsilon,h}\left(\frac{\pi}{h}\right) + \frac{2\pi}{h} Z \end{cases}$$







En notant que l'on a :

$$(2.73) \quad \varphi_{\epsilon,h}(0) \sim (\omega^2 + i\epsilon\omega)^{1/2} \quad \text{si } h \rightarrow 0$$

$$(2.74) \quad \cos\left(\varphi_{\epsilon,h}\left(\frac{\pi}{h}\right)h\right) \sim \frac{-1 + 4\lambda}{-3 + 4\lambda} \quad \text{si } h \rightarrow 0$$

On voit que la discrétisation amène, outre la périodisation des singularités (qui est naturelle puisque l'on travaille sur des séries de Fourier), une deuxième singularité, qui n'a pas d'équivalent dans le cas continu, et qui s'éloigne à l'infini lorsque  $h$  tend vers 0.

D'autre part, on notera la perte d'un ordre d'approximation induite par la décomposition (cf. (2.72)) : la décomposition multiplicative de Wiener Hopf n'est précise qu'à l'ordre 1. Nous retrouverons ce phénomène lorsque nous décrirons la décomposition additive.

Nous pouvons maintenant définir les opérateurs  $T_{\epsilon,h}^+$  et  $T_{\epsilon,h}^-$  par les diagrammes :

$$\begin{array}{ccc}
L^2(\mathbb{R}_h) & \xrightarrow{T_{\varepsilon,h}^+} & L^2(\mathbb{R}_h) \\
\downarrow F_h & & \uparrow F_h^{-1} \\
L^2\left(-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right) & \xrightarrow{\hat{T}_{\varepsilon,h}^+} & L^2\left(-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
L^2(\mathbb{R}_h) & \xrightarrow{T_{\varepsilon,h}^-} & L^2(\mathbb{R}_h) \\
\downarrow F_h & & \uparrow F_h^{-1} \\
L^2\left(-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right) & \xrightarrow{\hat{T}_{\varepsilon,h}^-} & L^2\left(-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right)
\end{array}$$

avec par définition :

$$(2.75) \quad \begin{cases} \left( \hat{T}_{\varepsilon,h}^+ \hat{\varphi}^h \right)(k) = \gamma_{\varepsilon,h}^+(k) \hat{\varphi}_h(k) \\ \left( \hat{T}_{\varepsilon,h}^- \hat{\varphi}^h \right)(k) = \gamma_{\varepsilon,h}^-(k) \hat{\varphi}_h(k) \end{cases}$$

$T_{\varepsilon,h}^+$  et  $T_{\varepsilon,h}^-$  sont tous deux des isomorphismes de  $L^2(\mathbb{R}_h)$ ,  $\gamma_{\varepsilon,h}^+(k)$  et  $\gamma_{\varepsilon,h}^-(k)$  ne s'annulant pas sur  $\mathbb{R}$ .

Nous désignons par  $S_{\varepsilon,h}^+$  et  $S_{\varepsilon,h}^-$  les opérateurs inverses de  $T_{\varepsilon,h}^+$  et  $T_{\varepsilon,h}^-$ . Par transformation de Fourier, ils sont bien évidemment définis par :

$$(2.76) \quad \begin{cases} F_h \cdot \left( S_{\varepsilon,h}^+ \varphi^h \right)(k) = \frac{F_h \varphi_h(k)}{\varphi_{\varepsilon,h}^+(k)} \\ F_h \cdot \left( S_{\varepsilon,h}^- \varphi^h \right)(k) = \frac{F_h \varphi_h(k)}{\varphi_{\varepsilon,h}^-(k)} \end{cases}$$

Les propriétés d'analyticité des fonctions  $\gamma_{\varepsilon,h}^+$  et  $\gamma_{\varepsilon,h}^-$  vont, de même que dans le cas continu, conférer aux opérateurs  $T_{\varepsilon,h}^+$  et  $S_{\varepsilon,h}^+$ ,  $T_{\varepsilon,h}^-$  et  $S_{\varepsilon,h}^-$  des propriétés vis vis de la causalité et de l'anticausalité. C'est l'objet du :

Lemme 2.2 :

Si  $A_h^+ \in L(L^2(\mathbb{R}_h^+), L^2(\mathbb{R}_h^+))$

$$\widehat{(A_h^+ \cdot \varphi_h)(k)} = (-\hat{A}_h^+(k)) \hat{\varphi}_h(k)$$

- le symbole  $k \rightarrow \hat{A}_h^+(k)$  se prolonge en une fonction analytique,  $\frac{2\pi}{h}$  périodique et satisfaisant une majoration du type :

$$|\hat{A}_h^+(z)| \leq C$$

Alors  $A_h^+$  transforme toute fonction de  $L^2(\mathbb{R}_h^+)$  en une fonction de  $L^2(\mathbb{R}_h^+)$ .

En d'autres termes, on a :

$$\text{si } (\varphi_h)(ph) = 0 \quad \forall p \leq 0$$

$$\text{alors } (A_h^+ \varphi_h)(ph) = 0 \quad \forall p \leq 0$$

Démonstration du lemme :

Elle est beaucoup plus simple que celle relative au lemme 1.1 du cas continu car on n'a pas besoin de raisonner par densité.

Soit  $\varphi_h$  un élément de  $L^2(\mathbb{R}_h^+)$  on a si  $p$  est un entier négatif ou nul :

$$(A_h^+ \varphi_h)(ph) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} \hat{A}_h^+(k) \hat{\varphi}_h(k) \exp iphk \, dk$$

Mais  $\varphi^h$  étant causale, on peut utiliser la proposition 2.1 pour affirmer que  $\hat{\varphi}^h(k) = F_h^+ \cdot \hat{\varphi}^h(k)$  est prolongeable en une fonction analytique sur  $P^-$ .

Utilisons le contour dessiné sur la figure ci-dessus pour écrire :

$$\begin{aligned} (A_h^+ \varphi_h)(ph) &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{AB} \hat{A}_h(z) \hat{\varphi}^h(z) \exp iphz \, dz \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{BC} \hat{A}_h(z) \hat{\varphi}^h(z) \exp iphz \, dz \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{CD} \hat{A}_h(z) \hat{\varphi}^h(z) \exp iphz \, dz \end{aligned}$$

Utilisons la périodicité pour affirmer l'annihilation de l'intégrale le long de AB par l'intégrale le long de CD. Il reste :

$$|(A_h^+ \varphi_h)(ph)| \leq \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{+\frac{\pi}{h}} |\hat{A}_h^+(\lambda + iR)| |\hat{\varphi}^h(\lambda + iR)| \exp -phR \, d\lambda$$

$$\text{soit } |(A_h^+ \varphi_h)(ph)| \leq \text{Cte} \exp -phR \sup_{\lambda} |\hat{\varphi}^h(\lambda + iR)|$$

or, toujours d'après la proposition 2.1 :

$$\sup |\hat{\varphi}^h(\lambda + iR)| \sim \text{Cte} \exp -hR$$

$$\text{d'où } |(A_h^+ \varphi_h)(ph)| = 0 \quad \text{si } p \leq 0. \quad \square$$

Pour notre part, nous utiliserons bien sûr le corollaire suivant :

Corollaire 2.1 :

Les opérateurs  $S_{\varepsilon,h}^+$  et  $T_{\varepsilon,h}^+$  préservent la causalité tandis que les opérateurs  $S_{\varepsilon,h}^-$  et  $T_{\varepsilon,h}^-$  préservent l'anticausalité.

On peut préciser la structure des opérateurs  $S_{\varepsilon,h}^+$  et  $S_{\varepsilon,h}^-$  :

En effet, de la même façon que pour le cas continu,  $S_{\varepsilon,h}^+$  et  $S_{\varepsilon,h}^-$  sont des opérateurs de convolution et leurs propriétés (causalité pour  $S_{\varepsilon,h}^+$ , anticausalité pour  $S_{\varepsilon,h}^-$ ) se transmettent aux fonctions discrètes qui les représentent.

On a donc :

$$(2.77) \quad \begin{cases} (S_{\varepsilon,h}^+ v_h)(x_p = ph) = h \sum_{q=0}^{+\infty} S_{\varepsilon,h}^+(x_q = qh) v_h(x_q - x_p = (p-q)h) \\ (S_{\varepsilon,h}^- v_h)(x_p = ph) = h \sum_{q=-\infty}^0 S_{\varepsilon,h}^-(x_q = qh) v_h(x_p - x_q = (p-q)h) \end{cases}$$

(On confond ici, par abus de notation, l'opérateur et sa fonction de convolution).

Le calcul de l'expression analytique des fonctions  $S_{\varepsilon,h}^+$  et  $S_{\varepsilon,h}^-$  n'est pas immédiat; un calcul assez long, que nous avons détaillé en annexe, permet d'obtenir le résultat suivant :

Proposition 2.2 :

$S_{\varepsilon,h}^+$  et  $S_{\varepsilon,h}^-$  sont données par les relations :

$$(2.78) \quad \begin{cases} S_{\varepsilon,h}^+(ph) = s_{\varepsilon,h}^+ * \delta_{\varepsilon,h}^+(ph) = h \sum_{q=0}^P s_{\varepsilon,h}^+(ph) \delta_{\varepsilon,h}^+(qh - ph) \text{ si } p \geq 0 \\ S_{\varepsilon,h}^+(ph) = 0 \quad \text{si } p < 0 \end{cases}$$

$$(2.79) \quad \begin{cases} S_{\varepsilon,h}^-(ph) = 0 \quad \text{si } p > 0 \\ S_{\varepsilon,h}^-(ph) = s_{\varepsilon,h}^- * \delta_{\varepsilon,h}^-(ph) = h \sum_{q=p}^0 s_{\varepsilon,h}^-(ph) \delta_{\varepsilon,h}^-(qh - ph) \text{ si } p \leq 0 \end{cases}$$

avec :

$$(2.80) \quad s_{\varepsilon, h}^+(x_p = ph) = \begin{cases} \frac{1+i}{h^{1/2}} \exp \left[ i \varphi_{\varepsilon, h}(0) \left( x_p + \frac{h}{4} \right) \right] \frac{\Gamma \left( \frac{x_p}{h} + \frac{1}{2} \right)}{\Gamma \left( \frac{x_p}{h} + 1 \right)} & \text{si } p \geq 0 \\ 0 & \text{si } p < 0 \end{cases}$$

$$(2.81) \quad s_{\varepsilon, h}^-(x_p = ph) = \begin{cases} 0 & \text{si } p > 0 \\ \frac{+1-i}{h^{1/2}} \exp \left[ -i \varphi_{\varepsilon, h}(0) \left( x_p - \frac{h}{4} \right) \right] \frac{\Gamma \left( -\frac{x_p}{h} + \frac{1}{2} \right)}{\Gamma \left( -\frac{x_p}{h} + 1 \right)} & \text{si } p \leq 0 \end{cases}$$

et

$$(2.82) \quad \delta_{\varepsilon, h}^+(x_p = ph) = \begin{cases} \frac{(4\lambda - 3)^{-1/4}}{h} \left( \frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \exp \left[ i \varphi_{\varepsilon, h} \left( \frac{\pi}{h} \right) \left( x_p + \frac{h}{4} \right) \right] \frac{\Gamma \left( \frac{x_p}{h} + \frac{1}{2} \right)}{\Gamma \left( \frac{x_p}{h} + 1 \right)} & \text{si } p \geq 0 \\ 0 & \text{si } p < 0 \end{cases}$$

$$(2.83) \quad \delta_{\varepsilon, h}^-(x_p = ph) = \begin{cases} 0 & \text{si } p > 0 \\ \frac{(4\lambda - 3)^{-1/4}}{h} \left( \frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \exp \left[ -i \varphi_{\varepsilon, h} \left( \frac{\pi}{h} \right) \left( x_p - \frac{h}{4} \right) \right] \frac{\Gamma \left( -\frac{x_p}{h} + \frac{1}{2} \right)}{\Gamma \left( -\frac{x_p}{h} + 1 \right)} & \text{si } p \leq 0 \end{cases}$$

De plus, on a les développements asymptotiques, lorsque  $h$  tend vers 0 :

$$(2.84) \quad s_{\varepsilon, h}^+(x_p) \rightarrow S_{\varepsilon}^+(x_p) = (1+i) \frac{\exp i k_{\varepsilon} x_p}{\sqrt{x_p}} \mathbf{1}_{\{x_p > 0\}}$$

$$(2.85) \quad s_{\varepsilon,h}^-(x_p) \rightarrow \bar{S}_{\varepsilon}^-(x_p) = (+1-i) \frac{\exp -ik_{\varepsilon} x_p}{\sqrt{-x_p}} 1\{x_p > 0\}$$

$$(2.86) \quad \delta_{\varepsilon,h}^+ \text{ et } \delta_{\varepsilon,h}^- \rightarrow \delta(x_p)$$

dans le sens où, lorsque  $h$  tend vers 0 :

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \delta_{\varepsilon,h}^+(x_p) \rightarrow 0 && \text{si } x_p \neq 0 \\ & \delta_{\varepsilon,h}^-(x_p) \rightarrow 0 && \text{si } x_p \neq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad & \int \delta_{\varepsilon,h}^+(x_p) dx_p = h \sum_{p=0}^{+\infty} \delta_{\varepsilon,h}^+(x_p) \rightarrow 1 \\ & \int \delta_{\varepsilon,h}^-(x_p) dx_p = h \sum_{p=-\infty}^0 \delta_{\varepsilon,h}^-(x_p) \rightarrow 1 \end{aligned}$$

### Interprétation :

La fonction discrète  $S_{\varepsilon,h}^+$  s'exprime comme la convolution de deux fonctions discrètes causales. L'une est indépendante de  $\lambda$ , c'est-à-dire du schéma, et est une approximation de  $S_{\varepsilon,h}^+$ . L'autre dépend de  $\lambda$  et est une approximation de l'unité qui module la première. Bien entendu, la même assertion est vraie pour  $S_{\varepsilon,h}^-$  en substituant anticausal à causal.

### Remarque :

Il faut bien prendre garde de distinguer le «degré» de causalité de la fonction  $\prod_h^+ u^{\varepsilon,h}$ , qui est à support dans  $\{1, 2, \dots\}$  de celui des fonctions définies ci-dessus,  $S_{\varepsilon,h}^+$  par exemple, qui sont à support dans  $\{0, 1, \dots\}$  ; le signe +, signe distinctif de la causalité, ne permet pas à lui seul de faire cette subtile distinction !

### e) Résolution de l'équation de Wiener Hopf

Nous avons à présent tous les éléments pour conclure :

Utilisons la décomposition multiplicative pour réécrire l'équation de Wiener Hopf (2.63) sous la forme :

$$T_{\varepsilon,h}^+ \circ \Pi_h (\gamma_o^h \circ u^{\varepsilon,h}) + S_{\varepsilon,h}^- \circ \Pi_h^- (\partial_n^h u^{\varepsilon,h}) = S_{\varepsilon,h}^- g^h$$

Décomposons le second membre de l'égalité à l'aide de la décomposition additive :

$$S_{\varepsilon,h}^+ g_h = \Pi_h^+ \circ S_{\varepsilon,h}^- g^h + \Pi_h^- \circ S_{\varepsilon,h}^- g^h$$

pour écrire :

$$\begin{aligned} T_{\varepsilon,h}^+ \circ \Pi_h^+ (\gamma_o^h \circ u^{\varepsilon,h}) - \Pi_h^+ \circ S_{\varepsilon,h}^- (g^h) \\ = - S_{\varepsilon,h}^- \circ \Pi_h^- (\partial_n^h u^{\varepsilon,h}) + \Pi_h^- \circ S_{\varepsilon,h}^- (g^h) \end{aligned}$$

Or d'après le corollaire (2.1), le premier terme correspond à une fonction causale (i.e. élément de  $L^2(\mathbb{R}_h^+)$ ) tandis que le deuxième est une fonction anticausale (i.e. élément de  $L^2(\mathbb{R}_h^-)$ ) d'où la nullité de chacune des deux fonctions.

on a donc :

$$\begin{cases} T_{\varepsilon,h}^+ \circ \Pi_h^+ \cdot \gamma_o^h u^{\varepsilon,h} - \Pi_h^+ \circ S_{\varepsilon,h}^- g^h = 0 \\ - S_{\varepsilon,h}^- \circ \Pi_h^- \cdot \partial_n^h u^{\varepsilon,h} + \Pi_h^- \circ S_{\varepsilon,h}^- g^h = 0 \end{cases}$$

d'où les solutions :

$$\begin{cases} \Pi_h^+ \gamma_o^h u^{\varepsilon,h} = S_{\varepsilon,h}^+ \circ \Pi_h^+ \circ S_{\varepsilon,h}^- g^h \\ \Pi_h^- \partial_n^h u^{\varepsilon,h} = T_{\varepsilon,h}^- \circ \Pi_h^- \circ S_{\varepsilon,h}^- g^h \end{cases}$$

et, en particulier :

$$\gamma_o^h \circ u^{\varepsilon,h} = S_{\varepsilon,h}^+ \circ \Pi_h^+ \circ S_{\varepsilon,h}^- g^h$$



c'est la solution recherchée.

Remarque :

On notera que la démonstration relative au cas discret est plus simple que celle attachée au cas continu où il faut raisonner par passage à la limite. Cela est dû principalement au caractère borné des opérateurs aux différences.

Nous résumons le résultat obtenu dans le théorème suivant :

Théorème 2.2. :

La trace  $(\gamma_o^h u^{\varepsilon,h})$  de l'unique solution du problème discret (2.38) - (2.39) - (2.40) :

$$(2.87) \quad (\omega^2 + i\varepsilon\omega) u^{\varepsilon,h} + A_{h,\lambda}^+ u^{\varepsilon,h} = -2h g^h$$

sur l'axe  $\{u_q = qh = 0\}$  est donnée par :

$$(2.88) \quad (\gamma_o^h u^{\varepsilon,h}) = (S_{\varepsilon,h}^+ \circ \Pi_h^+ \circ S_{\varepsilon,h}^-) g^h$$

où :

- $S_{\varepsilon,h}^+, S_{\varepsilon,h}^-$  sont les opérateurs de convolution causal et anticausal dont les fonctions associées sont décrites dans la proposition (2.2).
- $\Pi_h^+$  est l'opérateur de restriction à l'ensemble  $\{ph ; p \geq 1\}$ .

En utilisant le relèvement  $R_{\varepsilon,h}$  on obtient, bien sûr, le corollaire suivant :

Corollaire 2.2 :

L'unique solution du problème discret (2.89) est donnée par :

$$u^{\varepsilon,h} = R_{\varepsilon,h} \circ (S_{\varepsilon,h}^+ \circ \Pi_h^+ \circ S_{\varepsilon,h}^-) g^h$$

où  $R_{\varepsilon,h}$  est le relèvement, défini dans la proposition 2.1.

Nous allons, à présent, donner une expression plus calculable de la solution de notre problème. Pour cela, nous considérons des données plus régulières. Plus précisément et par analogie avec (1.52) nous supposons désormais que l'on a :

$$(2.90) \quad |g_h(x_p = ph)| \leq C e^{-\eta |x_p|}$$

où  $\eta$  est un nombre réel positif.

f) Expression de la solution pour des données régulières, décomposition de Wiener Hopf additive discrète

Théorème 2.3 :

Si  $g_h$  satisfait l'hypothèse (2.90). la solution  $u^{\varepsilon, h}$  du problème (2.38) - (2.39) - (2.40) est donnée par l'expression :

$$(2.91) \quad u^{\varepsilon, h}(ph, qh) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} \hat{u}^{\varepsilon, h}(k, ph=0) \exp i [hpk + hq \varphi_{\varepsilon, h}(k)] dk$$

avec :

$$(2.92) \quad \hat{u}^{\varepsilon, h}(k, ph=0) = \frac{-h}{2\pi \gamma_{\varepsilon, h}^+(k)} \int_{-\frac{\pi}{h} + i\sigma}^{\frac{\pi}{h} + i\sigma} \frac{\hat{g}_h(z) dz}{\gamma_{\varepsilon, h}^-(z) (1 - \exp i(k-z)h)}$$

$$0 < \sigma < \inf \left( v, \frac{\tau_h(\varepsilon)}{h} \right)$$

(c'est-à-dire  $\sigma$  positif assez petit)

## Démonstration

Notons tout d'abord que la première formule est immédiate (et d'ailleurs vraie pour des données  $g_h$  de  $L^2(\mathbb{R}_h^+)$ ) car elle n'exprime rien d'autre que le résultat que nous avons obtenu lors de la réduction du problème (paragraphe b).

Il ne reste donc à démontrer que la formule portant sur la trace de la solution sur la fissure.

Nous partons de l'expression :

$$u^{\varepsilon,h}(ph, qh=0) = \left( S_{\varepsilon,h}^+ \circ \Pi_h^+ \circ S_{\varepsilon,h}^- \right)(ph)$$

pour écrire :

$$\hat{u}^{\varepsilon,h}(k, qh=0) = (F \circ S_{\varepsilon,h}^+ \circ F^{-1}) (F \circ \Pi_h^+ \circ F^{-1}) (F \circ S_{\varepsilon,h}^- \circ F^{-1}) \hat{g}_h(k)$$

soit en utilisant (2. 76) :

$$\hat{u}^{\varepsilon,h}(k, qh=0) = \frac{1}{\gamma_{\varepsilon,h}^+(k)} G_h^+ \begin{bmatrix} \hat{g}_h(k) \\ \gamma_{\varepsilon,h}^-(k) \end{bmatrix}$$

avec :

$$(2.93) \quad \left\{ \begin{array}{l} G_h^+ \hat{v}_h(k) = \frac{h}{(2\pi)} \sum_{p=1}^{+\infty} \left\{ \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} \hat{v}_h(k') \exp ipk' h dk' \right\} \exp - ipk \\ \\ G_h^+ \equiv F \circ \Pi_h^+ \circ F^{-1} \end{array} \right.$$

$G_h^+$  est l'équivalent discret de l'opérateur  $G^+$  du paragraphe (1.c).

Pour conclure, il nous suffit donc de démontrer le lemme :

Lemme 2.4 :

Si  $\hat{v}_h$  est élément de  $W_h(\eta)$ , espace des transformées de Fourier des fonctions discrètes vérifiant (2.90), on a l'équivalence :

$$(2.94) \quad G_h^+ \hat{v}_h(k) = (F \circ \Pi_h^+ \circ F^{-1}) \hat{v}_h(k)$$

$$(2.95) \quad G_h^+ \hat{v}_h(k) = \frac{-h}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{h} + i\sigma}^{\frac{\pi}{h} + i\sigma} \hat{v}_h(\xi) \frac{d\xi}{1 - \exp ih(k - \xi)}$$

avec  $0 < \sigma < \eta$

Preuve du lemme :

La condition (2.90) implique que  $\hat{v}_h(k)$  est analytique sur la bande du plan complexe :

$$B_\eta = \{z \in \mathbb{C} \mid -\eta < \text{Im} z < \eta\}$$

De plus, cette fonction est  $\frac{2\pi}{h}$  périodique, car transformée de Fourier d'une fonction discrète. En utilisant cette périodicité et le théorème de Cauchy, nous pouvons comme pour le lemme (2.2) remplacer dans (2.93) le segment

$\left[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right]$  en le segment  $\left[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right] + i\sigma$ . On a alors :

$$G_h^+ \hat{v}_h(k) = \frac{h}{(2\pi)} \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ \int_{-\frac{\pi}{h} + i\sigma}^{\frac{\pi}{h} + i\sigma} \hat{v}_h(\xi) \exp ip h \xi d\xi \right\} \exp - ip h k$$

Sur le nouveau segment d'intégration, la série :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \exp ihp (\xi - k)$$

est normalement convergente, on peut donc permuter signe somme et signe intégration. Il vient :

$$G_h^+ \hat{v}_h(k) = \frac{h}{(2\pi)} \int_{\frac{\pi}{h} + i\sigma}^{\frac{\pi}{h} + i\sigma} \hat{v}_h(\xi) \frac{\exp ih (\xi - k) d\xi}{1 - \exp ih (\xi - k)}$$

ce qui est l'expression recherchée.

Remarque :

Comme en continu, on peut exprimer l'opérateur  $G_h^+$  à l'aide d'une valeur principale, on trouve :

$$(2.96) \quad G_h^+ \hat{\phi}^h = \frac{\hat{\phi}^h}{2} + \frac{i}{2} H_h \hat{\phi}^h$$

où  $H_h$  est l'opérateur de  $L^2(R_h)$  dans lui-même, défini par :

$$(2.97) \quad \begin{cases} (H_h \hat{\phi}_h)(k) = \frac{1}{\pi} v \cdot p \cdot \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} F_h(k - \zeta) \hat{\phi}(\zeta) d\zeta \\ F_h(\zeta) = \frac{-ih}{1 - \exp ih\zeta} \end{cases}$$

Ce résultat est à comparer avec celui obtenu au chapitre 1 :

$$(2.98) \quad \begin{cases} G^+ \hat{\varphi} = \frac{\hat{\varphi}}{2} + \frac{i}{2} H \hat{\varphi} \\ H \hat{\varphi} = \frac{1}{\pi} v \cdot p \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{\varphi}(\zeta) d\zeta}{k - \zeta} \end{cases}$$

En particulier, on notera, que lorsque  $h \rightarrow 0$  :

$$(2.99) \quad \left| F_h(\zeta) - \frac{1}{k - \zeta} \right| = o(h)$$

La décomposition additive discrète peut, en ce sens, être considérée comme une approximation, d'ordre 1 (seulement !) de la décomposition additive continue.

Les formules que nous venons d'établir vont nous permettre dans la suite d'effectuer le passage à la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ , c'est-à-dire de calculer la solution «sortante» par absorption limite.

## 2.4. CALCUL DE LA SOLUTION SORTANTE PAR ABSORPTION LIMITE

Le but de cette sous-section est d'obtenir l'équivalent pour le problème discret des résultats que nous avons obtenus sur la solution sortante du problème continu (sous-section 1.4). Là encore, nous ne chercherons pas à obtenir un résultat optimal et nous ne donnerons une expression de la solution que pour des données régulières (satisfaisant l'hypothèse (2.90)).

Le passage à la limite  $\varepsilon \downarrow 0^+$  ne peut se faire directement sur la formule du théorème (2.3). De même que dans le cas continu, on va utiliser l'analyticité de la fonction intégrande pour déformer le segment d'intégration en un contour sur lequel le passage à la limite sera loisible. Bien sûr, cela ne pourra se faire que lorsque nous aurons examiné soigneusement les singularités des fonctions impliquées. C'est ce que nous ferons dans le paragraphe 2.4.1.

Dans le paragraphe 2.4.2, nous détaillerons suivant le schéma (valeur de  $\lambda$ ) et suivant les valeurs admissibles de la fréquence adimensionnelle (valeur de  $\omega h$ ) le nouveau contour d'intégration.

Ces contours interviendront dans l'expression de la solution sortante que nous donnerons dans la proposition (2.3) du paragraphe 2.4.3.

### a) Description des singularités et comportement asymptotique lorsque $\varepsilon$ tend vers 0

Nous cherchons dans cette section à définir :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} u^{\varepsilon, h}(ph, qh) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} \hat{u}^{\varepsilon, h}(k, qh=0) \exp i(phk + qh \varphi_{\varepsilon, h}(k)) dk \\ \hat{u}^{\varepsilon, h}(k, qh=0) = \frac{-h}{2\pi \gamma_{\varepsilon, h}^+(k)} \int_{-\frac{\pi}{h} + i\sigma}^{\frac{\pi}{h} + i\sigma} \frac{\hat{g}_h(z) dz}{\gamma_{\varepsilon, h}^-(z) (1 - \exp ih(k - z))} \end{array} \right.$$

Ces formules font intervenir les fonctions :

$$z \rightarrow \gamma_{\varepsilon,h}^+(z)$$

$$z \rightarrow \gamma_{\varepsilon,h}^-(z) = i\gamma_{\varepsilon,h}^+(z)$$

$$z \rightarrow \{\exp i h \varphi_{\varepsilon,h}(z)\} = \{\exp i h \varphi_{\varepsilon,h}(z)\}^q$$

$$z \rightarrow \hat{g}_h(z)$$

L'hypothèse (2.90) nous permettant d'assurer l'analyticité de la fonction  $g_h$  sur la bande

$$B_\eta = \{z \in \mathbb{C} / -\eta < \text{Im} z < \eta\},$$

celle-ci ne posera pas de difficulté lors du passage à la limite.

Parallèlement, en utilisant les 4 relations :

$$(2.100) \quad \exp i h \varphi_{\varepsilon,h}(z) = \cos h \varphi_{\varepsilon,h}(z) + i \sin h \varphi_{\varepsilon,h}(z)$$

$$(2.101) \quad \cos h \varphi_{\varepsilon,h}(z) = \frac{(-\omega^2 h^2 + i\varepsilon\omega h^2) + 4\lambda - 2(2\lambda - 1) \cos hz}{2(2\lambda - 1 + 2(1 - \lambda) \cos hz)}$$

$$(2.102) \quad \sin h \varphi_{\varepsilon,h}(z) = \frac{i h \gamma_{\varepsilon,h}(z)}{(2\lambda - 1 + 2(1 - \lambda) \cos hz)}$$

$$(2.103) \quad \gamma_{\varepsilon,h}(z) = \gamma_{\varepsilon,h}^+(z) \gamma_{\varepsilon,h}^-(z)$$

On obtient la formule :

$$(2.104) \quad \exp i h \varphi_{\varepsilon,h}(z) = \frac{-(\omega^2 h^2 + i\varepsilon\omega h^2) + 4\lambda - 2(2\lambda - 1) \cos hz - 2h \gamma_{\varepsilon,h}^+(z) \gamma_{\varepsilon,h}^-(z)}{2(2\lambda - 1 + 2(1 - \lambda) \cos hz)}$$

Ainsi, les singularités des fonctions intégrantes sont, sur une période :



- 1) Les deux branches de  $\gamma_{\varepsilon,h}^+(z)$  qui joignent  $\varphi_{\varepsilon,h}(0)$  et  $\varphi_{\varepsilon,h}\left(\frac{\pi}{h}\right)$  à l'infini suivant des lignes verticales ascendantes.
- 2) Les deux branches de  $\gamma_{\varepsilon,h}^-(z)$  qui joignent  $-\varphi_{\varepsilon,h}(0)$  et  $-\varphi_{\varepsilon,h}\left(\frac{\pi}{h}\right)$  à l'infini suivant des lignes verticales descendantes ; ces deux lignes verticales se déduisant des deux premières par une symétrie centrale par rapport à l'origine.
- 3) Les points  $\pm \varphi_h^*$  annulant le dénominateur de (2.104) et définis par :

$$(2.105) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos(h \varphi_h^*) = \frac{-(2\lambda - 1)}{2(\lambda - 1)} \\ \text{Im}(\varphi_h^*) > 0 \quad \text{et} \quad \text{Réelle } \varphi_h^* = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\pi}{h} \\ \text{ou bien} \\ \text{Im}(\varphi_h^*) = 0 \quad \text{et} \quad \text{Réelle } \varphi_h^* \in \left[0, \frac{\pi}{h}\right]. \end{array} \right.$$

$\varphi_h^*$  peut être, suivant les valeurs de  $\lambda$ , réel ou imaginaire pur.

Plus précisément, un calcul simple montre que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{si } \frac{1}{2} < \lambda < \frac{3}{4} & \varphi_h^* \in \left[0, \frac{\pi}{h}\right] \\ \text{si } \frac{3}{4} < \lambda < 1 & \varphi_h^* \in i \mathbb{R}^+ \\ \text{si } 1 < \lambda < +\infty & \varphi_h^* \in \frac{\pi}{h} + i \mathbb{R}^+ \end{array} \right.$$

Ainsi, si  $\lambda$  est supérieur à 0.75, les points  $\pm \varphi_h^*$  sont, quitte à diminuer  $\eta$ , hors de la bande  $B_\eta$ .

Par contre, si  $\lambda$  est compris entre 0.5 et 0.75, la fonction :

$$k \rightarrow \exp i h \varphi_{\varepsilon,h}(k)$$

apparaît comme singulière aux points  $\pm \varphi_h^*$ , éléments de la bande  $B_\eta$ .

En fait, il n'en est rien. On peut montrer que la fonction :

$$\begin{cases} z_{\varepsilon,h}(k) = \exp i h \varphi_{\varepsilon,h}(k) & \text{si } k \neq \pm \varphi_h^* \\ z_{\varepsilon,h}(\pm \varphi_h^*) = 0 \end{cases}$$

est définie, continue, analytique, au voisinage de chaque point  $\pm \varphi_h^*$  !

La démonstration repose sur le lemme suivant :

### Lemme 2.3

Si  $C(z)$  est une fonction analytique au voisinage d'un point  $z_0$  et nulle en  $z_0$ , le système :

$$(2.106) \quad \begin{cases} \frac{1}{2} \left[ z_{\varepsilon,h}(z) + \frac{1}{z_{\varepsilon,h}(z)} \right] = \frac{1}{C(z)} \\ |z_{\varepsilon,h}(z)| \leq 1 \end{cases}$$

définit une fonction analytique au voisinage du point  $z_0$ , nulle en ce point.

### Preuve du lemme :

Quitte à diminuer le voisinage de  $z_0$  où  $C$  est définie, on peut supposer :

$$|C(z)| < 1$$

mais alors le système (2.106) se résout en :

$$z_{\varepsilon,h}(z) = \frac{1}{C(z)} [1 - \sqrt{1 - C^2(z)}]$$

expression qui est telle que :

$$z_{\varepsilon,h}(z) \sim \frac{C(z)}{2} = 0 \quad \text{en } z = z_0$$

Les points  $\pm \varphi_h^*$  ne sont donc pas des singularités pour l'intégrande. Toutefois, il est clair que l'argument  $\varphi_{\varepsilon,h}(k)$  ne peut être défini aux points  $\pm \varphi_h^*$ , ces points étant des singularités de type  $\text{Log } z$  en  $z = 0$ .

En travaillant un peu, on pourrait montrer qu'en enlevant, en plus des coupures 1) et 2) déjà décrites :

- une branche issue de  $\varphi_h^*$  et joignant l'infini par une ligne verticale ascendante,
- une branche issue de  $-\varphi_h^*$  et joignant l'infini par une ligne verticale descendante,

on pourrait définir une détermination de  $\varphi_{\varepsilon,h}(k)$  qui soit analytique sur son domaine et dont la partie réelle est comprise entre  $-\frac{\pi}{h}$  et  $\frac{\pi}{h}$ .

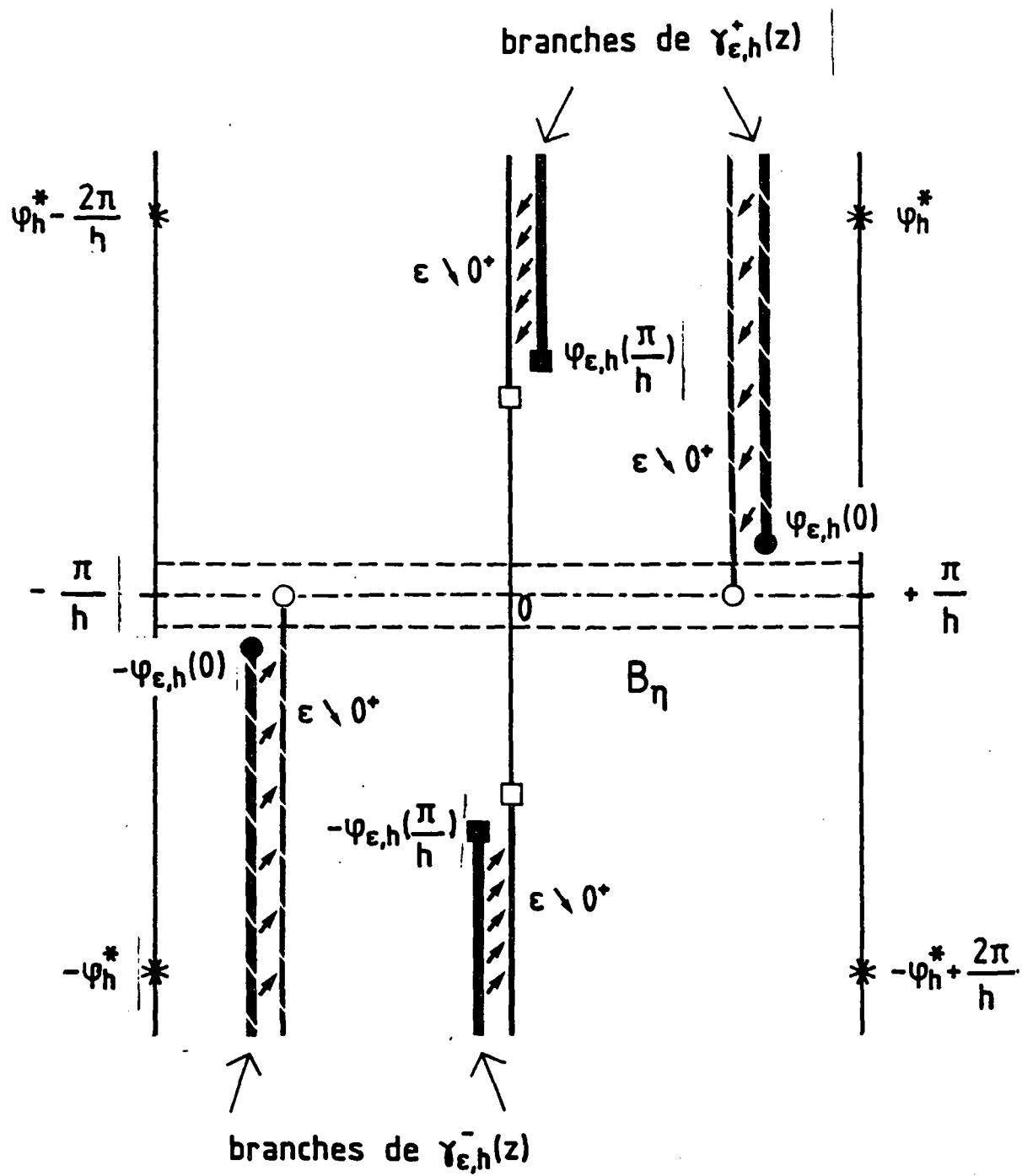
Nous ne nous attarderons pas sur ce point, car nous n'aurons pas besoin de ce résultat par la suite.

D'après cette étude rapide, les singularités sont donc uniquement constituées par les deux familles de branches 1) et 2). Lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, les branches verticales se meuvent dans le plan complexe en suivant le déplacement de leurs pointes,  $\pm \varphi_{\varepsilon,h}(0)$  et  $\pm \varphi_{\varepsilon,h}\left(\frac{\pi}{h}\right)$ . (cf. figure ci-contre).

Nous convenons de poser :

$$(2.107) \quad \begin{cases} \varphi_h(0) &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0^+} \varphi_{\varepsilon,h}(0) \\ \varphi_h\left(\frac{\pi}{h}\right) &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0^+} \varphi_{\varepsilon,h}\left(\frac{\pi}{h}\right) \end{cases}$$

$$(2.108) \quad \begin{cases} z_{\varepsilon,h}(0) &= \exp i h \varphi_{\varepsilon,h}(0) \\ z_{\varepsilon,h}\left(\frac{\pi}{h}\right) &= \exp i h \varphi_{\varepsilon,h}\left(\frac{\pi}{h}\right) \end{cases}$$



Déplacement des singularités

$$(2.109) \quad \begin{cases} z_h(0) &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0^+} z_{\varepsilon, h}(0) = \exp i h \varphi_h(0) \\ z_h\left(\frac{\pi}{h}\right) &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0^+} z_{\varepsilon, h}\left(\frac{\pi}{h}\right) = \exp i h \varphi_h\left(\frac{\pi}{h}\right) \end{cases}$$

$$(2.110) \quad \begin{cases} z_h^* &= \exp i h \varphi_h^* \\ \varphi_h^* &\text{ défini en (2.105)} \end{cases}$$

Le passage à la limite  $\varepsilon \downarrow 0^+$  dans les relations (2.66) et (2.67) permet d'obtenir :

$$(2.11) \quad \cos [h \varphi_h(0)] = 1 - \frac{\omega^2 h^2}{2}$$

$$(2.112) \quad \cos\left(h \varphi_h\left(\frac{\pi}{h}\right)\right) = \frac{4\lambda - 1 - \frac{\omega^2 h^2}{2}}{4\lambda - 3}$$

Les quatre points  $\pm \varphi_h(0)$  et  $\pm \varphi_h\left(\frac{\pi}{h}\right)$  sont, presque toujours, distincts comme le montre la relation :

$$\cos(h \varphi_h(0)) - \cos\left(h \varphi_h\left(\frac{\pi}{h}\right)\right) = \frac{-2}{4\lambda - 3} \{1 - \omega^2 h^2 (1 - \lambda)\}$$

Ils possèdent deux propriétés remarquables : leurs cosinus est réel et ils sont limites de complexe de partie imaginaire positive. Ils ne peuvent donc appartenir qu'aux ensembles :

$$1) \quad \left[ -\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h} \right]$$

$$2) \quad i R^+$$

$$3) \quad \pm \frac{\pi}{h} + i R^+$$

On observera que ces points peuvent atteindre l'axe réel et appartenir au segment d'intégration. Ils induisent alors une singularité qu'il convient d'étudier soigneusement.

L'étude analytique des expressions (2. 100) (2.103) conduit à distinguer deux cas :

$$1) \lambda > \frac{3}{4}$$

$$2) \frac{1}{2} < \lambda < \frac{3}{4}$$

Pour chacun de ces cas, nous avons choisi d'illustrer l'influence du paramètre  $\omega h$  sur la position des branches, en représentant :

a) la position de  $z_h(0)$  et de  $z_h\left(\frac{\pi}{h}\right)$  dans le plan complexe,

b) les branches issues des points  $\pm \varphi_h(0)$  et  $\pm \varphi_h\left(\frac{\pi}{h}\right)$  dans la bande :

$$\left\{ z \in \mathbb{C} ; -\frac{\pi}{h} < \text{Réelle } z < \frac{\pi}{h} \right\}$$

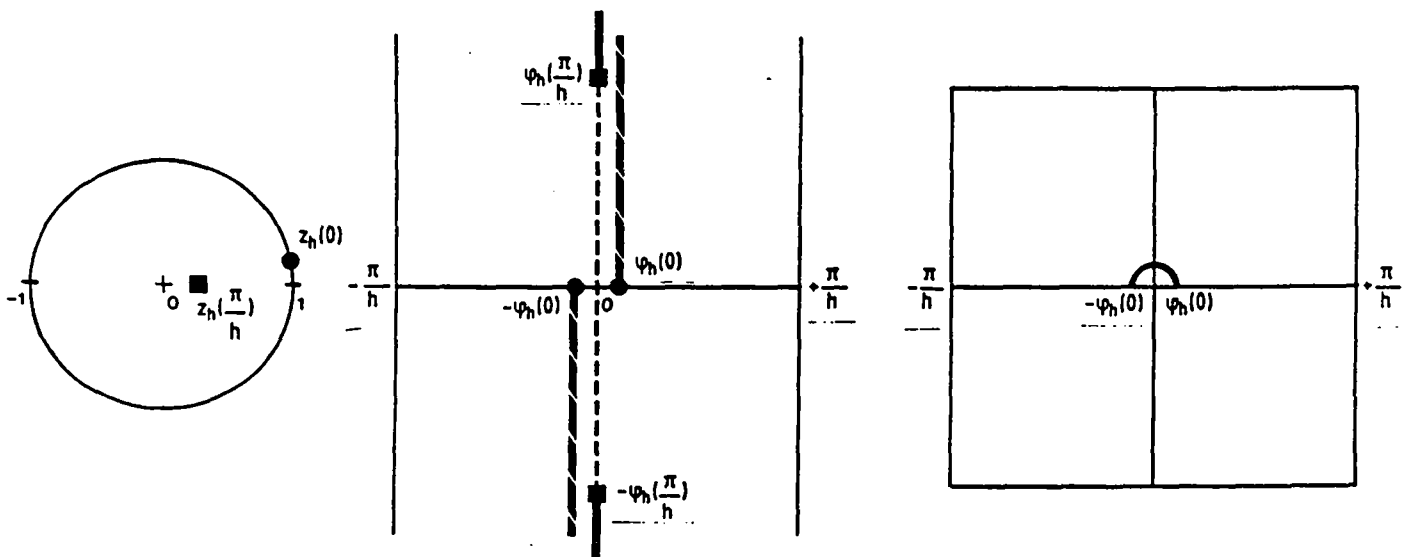
c) le graphe de la fonction

$$k \rightarrow \begin{cases} \varphi_h(k) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varphi_{\varepsilon, h}(k) & \text{si } \varphi_h(k) \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

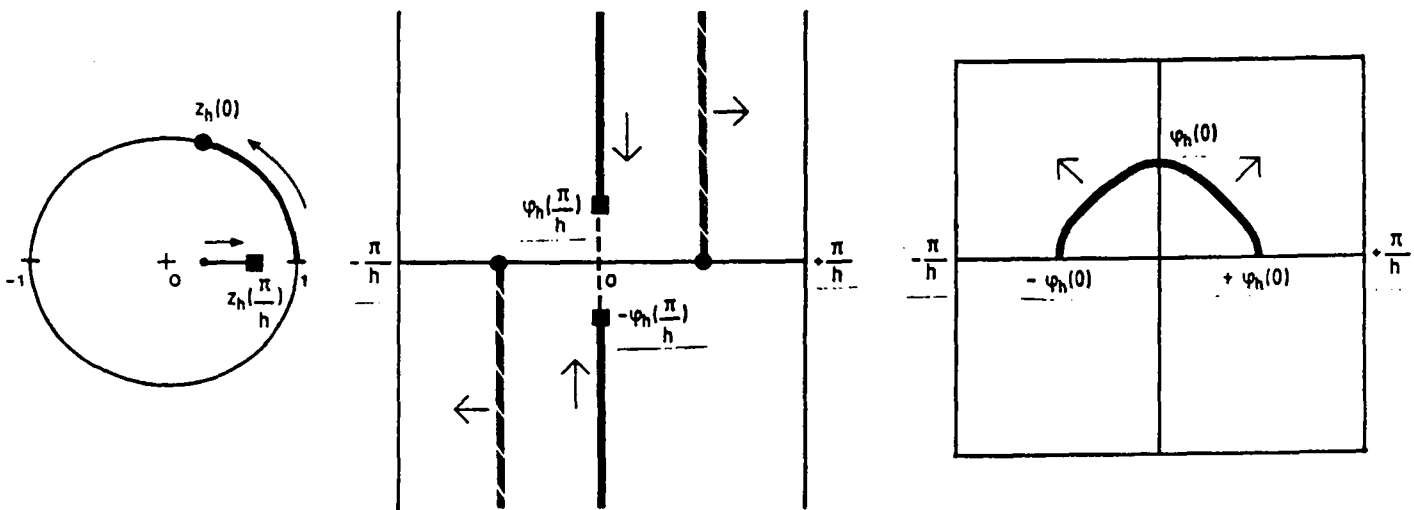
(On obtient ainsi une partie de la courbe de dispersion définie en (2.1.1)).

$$A) \lambda > 3/4$$

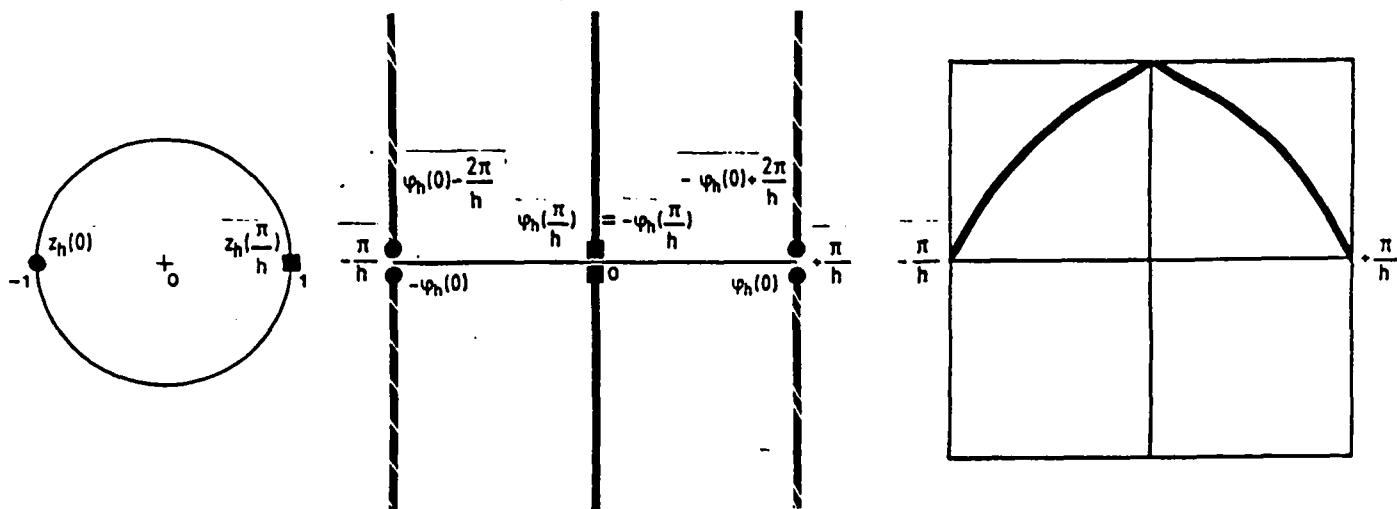
Lorsque  $\omega h$  croît de 0 à 2,  $z_h(0)$  décrit le demi-cercle supérieur dans le sens direct en partant du point d'affixe 1. Pendant ce temps  $z_h(\pi/h)$  part d'un point d'affixe réel compris entre 0 et 1 pour atteindre le point d'affixe 1 :



$\omega h = 0$

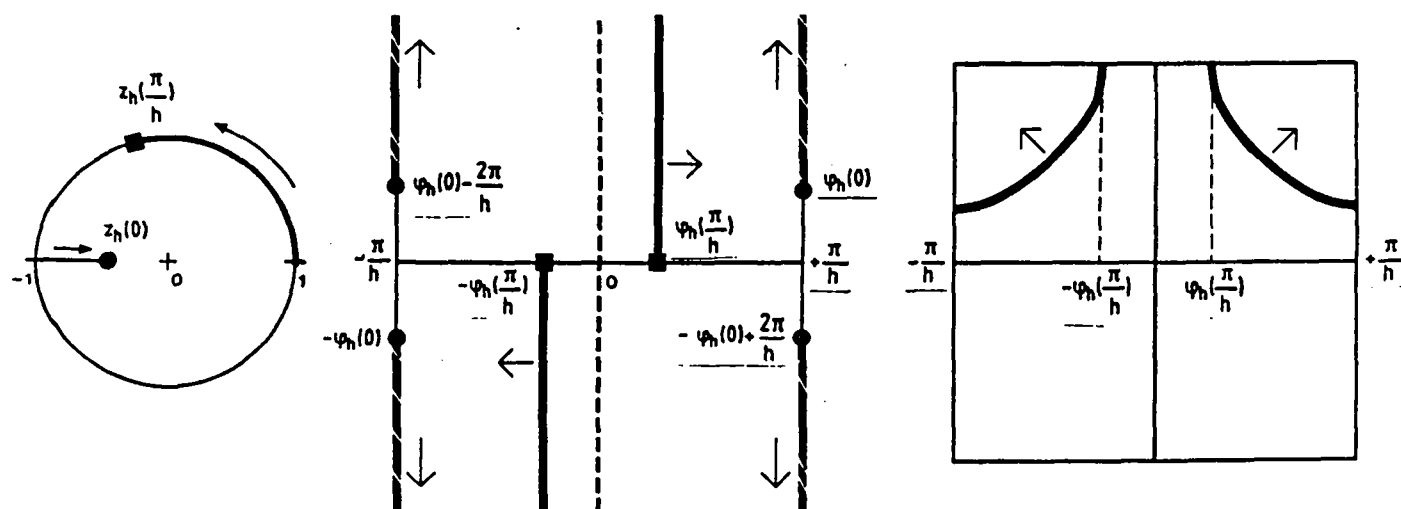


$\omega h$  croît de 0 à 2



$\omega h = 2$  (on notera l'apparition des branches périodiques)

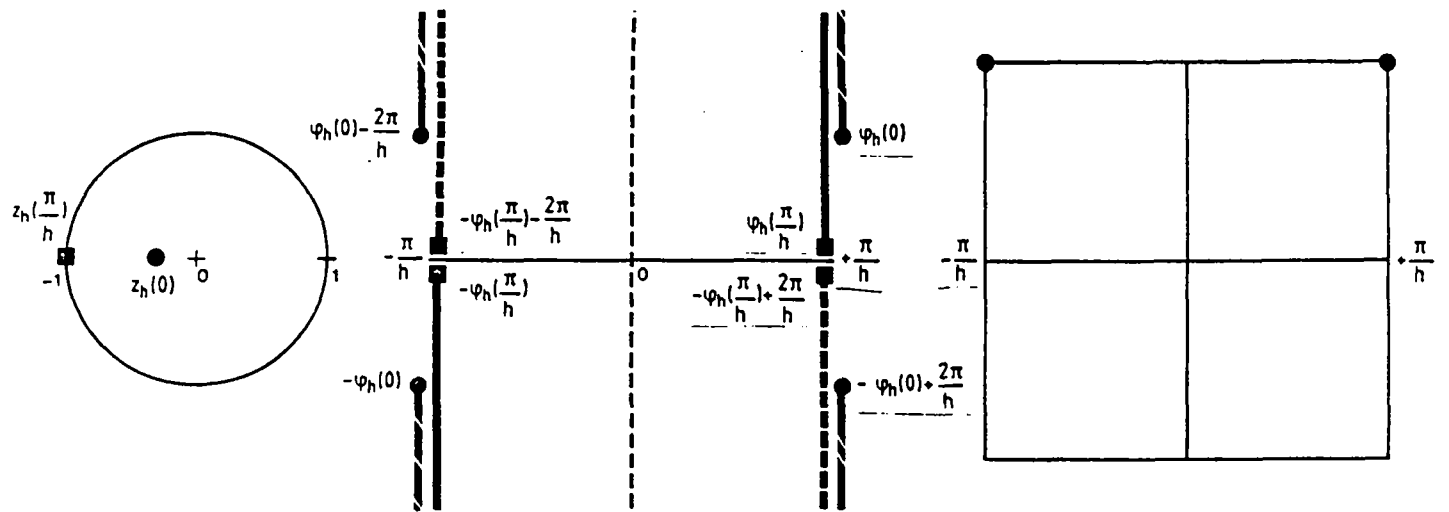
Augmentons encore  $\omega h$  de 2 jusqu'à  $\sqrt{8(2\lambda - 1)}$ ;  $z_h(0)$  parcourt une partie du segment  $[-1, 0]$  tandis que  $z_h\left(\frac{\pi}{h}\right)$  décrit le demi-cercle supérieur :



$\omega h$  croît de 2 à  $\sqrt{8(2\lambda - 1)}$

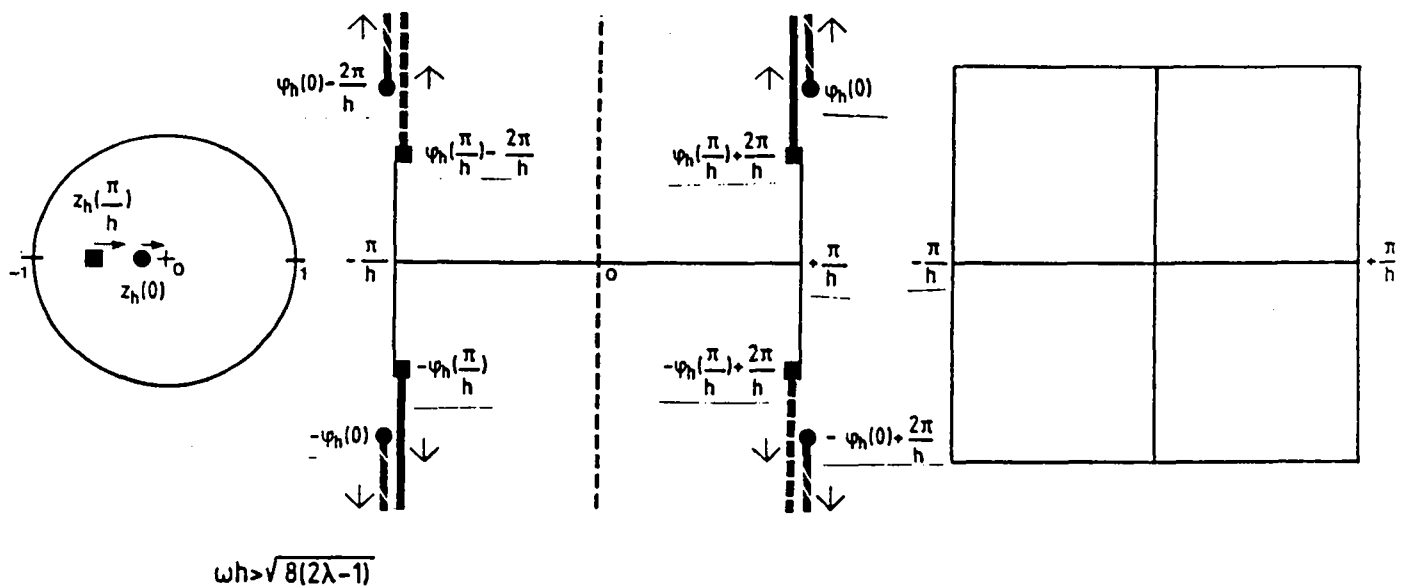


De même que pour la valeur 2, la valeur  $\sqrt{8(2\lambda - 1)}$  est une valeur singulière pour laquelle on a le schéma suivant :



$$\omega h = \sqrt{8(2\lambda - 1)}$$

Enfin, lorsque  $\omega h$  dépasse  $\sqrt{8(2\lambda - 1)}$  (c'est-à-dire la norme de l'opérateur  $\Delta_{\lambda, h}$  comme indiqué en 2.1),  $z_h(0)$  et  $z_h\left(\frac{\pi}{h}\right)$  se dirigent vers le point 0, suivant le segment d'affixe  $] -1, 0[$  :

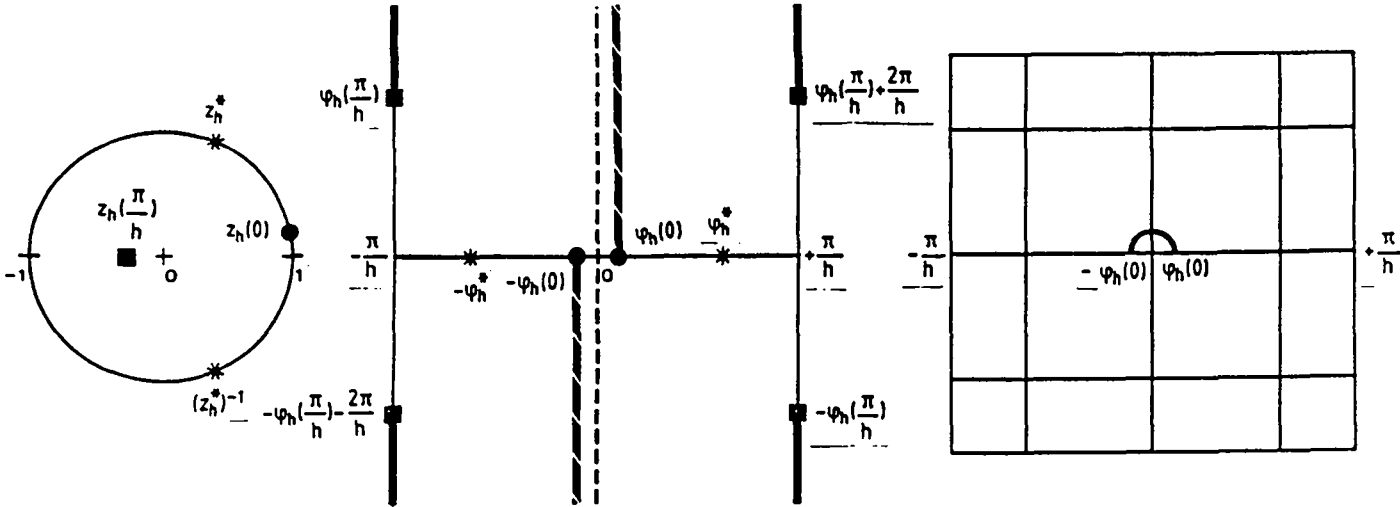


$$\omega h > \sqrt{8(2\lambda - 1)}$$

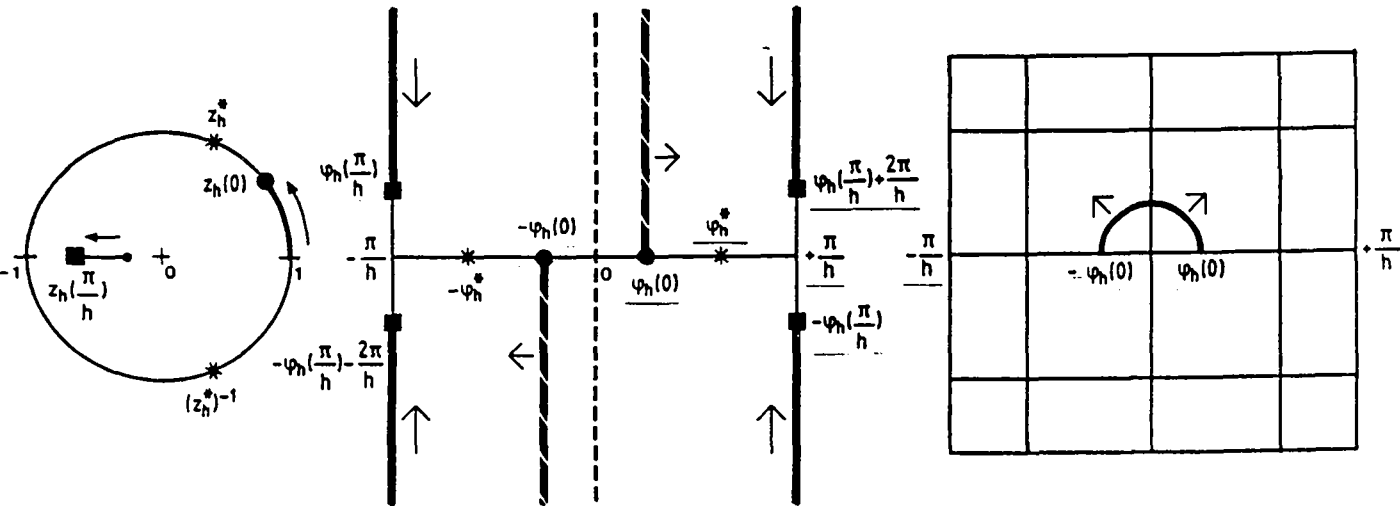
On notera que dans le cas où  $\lambda$  est inférieur à  $3/4$  une seule singularité apparaît sur le segment  $\left[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right]$ . Dans le deuxième cas,  $(1/2 < \lambda < 3/4)$ , il peut en être autrement.

B)  $\frac{1}{2} < \lambda < \frac{3}{4}$

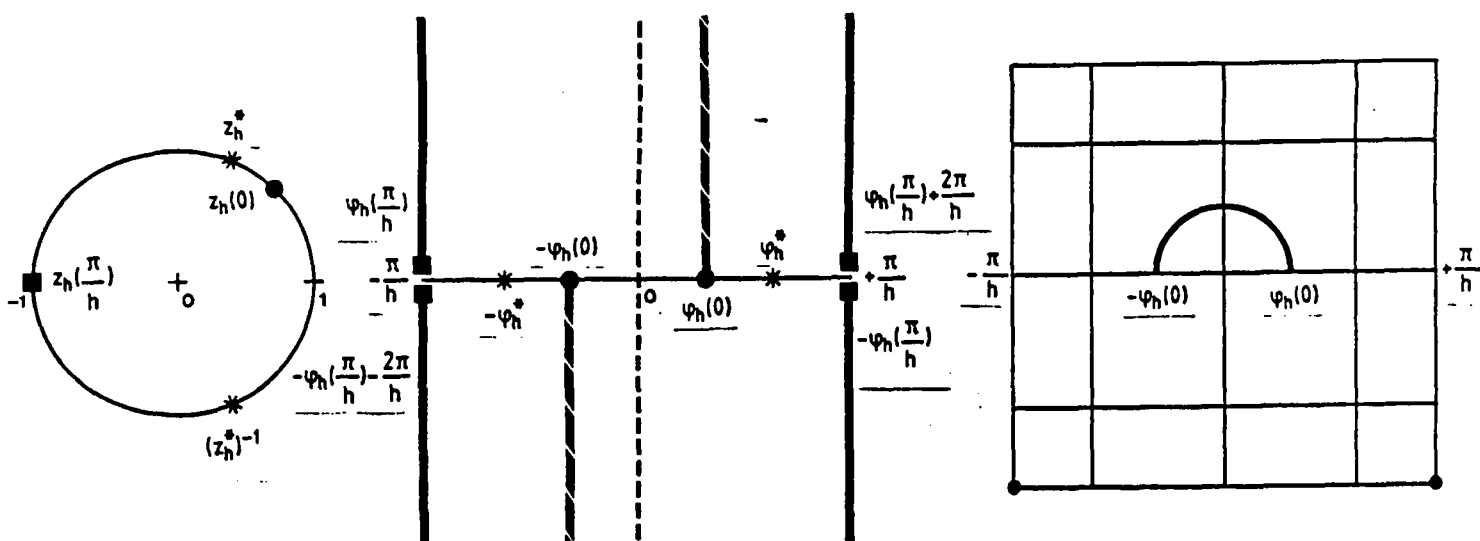
Lorque  $\omega h$  croît de 0 à  $\sqrt{8(2\lambda - 1)}$ ,  $z_h(0)$  décrit une portion du demi-cercle supérieur tandis que  $z_h\left(\frac{\pi}{h}\right)$  joint un point du segment  $[-1,0]$  au point d'affixe 1.



$\omega h=0$

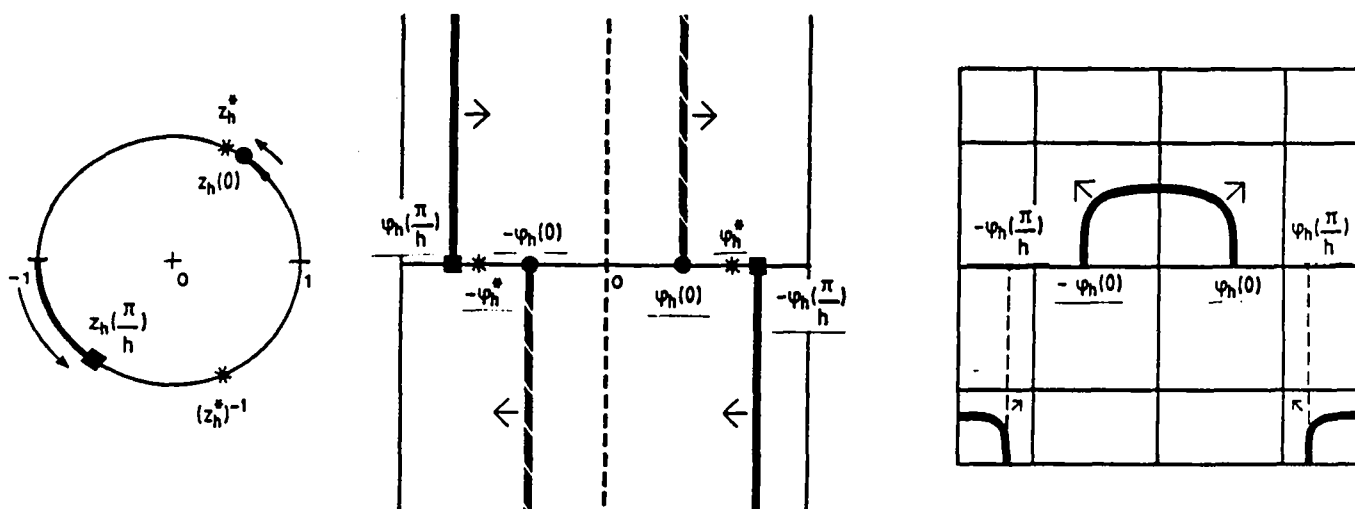


$\omega h$  croît de 0 à  $\sqrt{8(2\lambda - 1)}$



$$\omega h = \sqrt{8(2\lambda - 1)}$$

Lorsque  $\omega h$  croît de  $\sqrt{8(2\lambda - 1)}$  à  $\sqrt{\frac{1}{1-\lambda}}$ ,  $z_h\left(\frac{\pi}{h}\right)$  décrit une portion du demi-cercle inférieur tandis que  $z_h(0)$  continue de décrire une portion du demi-cercle supérieur. Il est important de noter que le segment  $[z_h^*, (z_h^*)^{-1}]$  sépare les deux portions de demi-cercle : les points  $\pm \varphi_h(0)$  et  $\pm \varphi_h\left(\frac{\pi}{h}\right)$  sont toujours quatre points distincts.

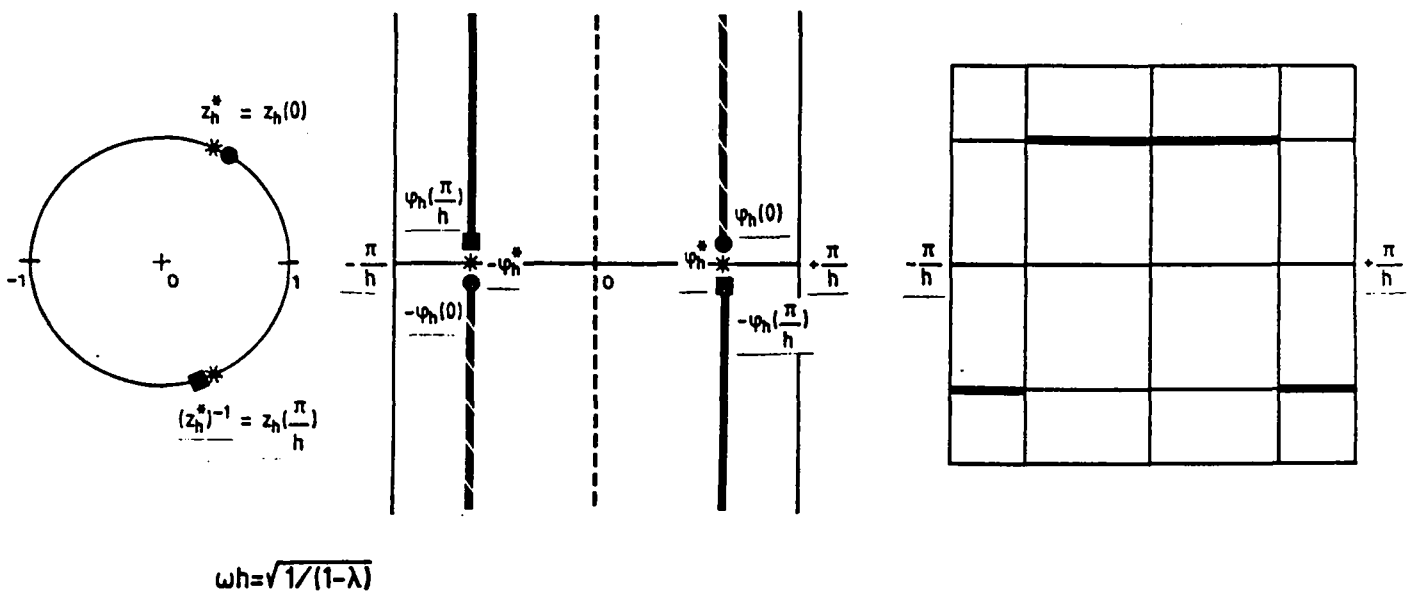


$$\omega h \text{ croît de } \sqrt{8(2\lambda - 1)} \text{ à } \sqrt{1/(1-\lambda)}$$

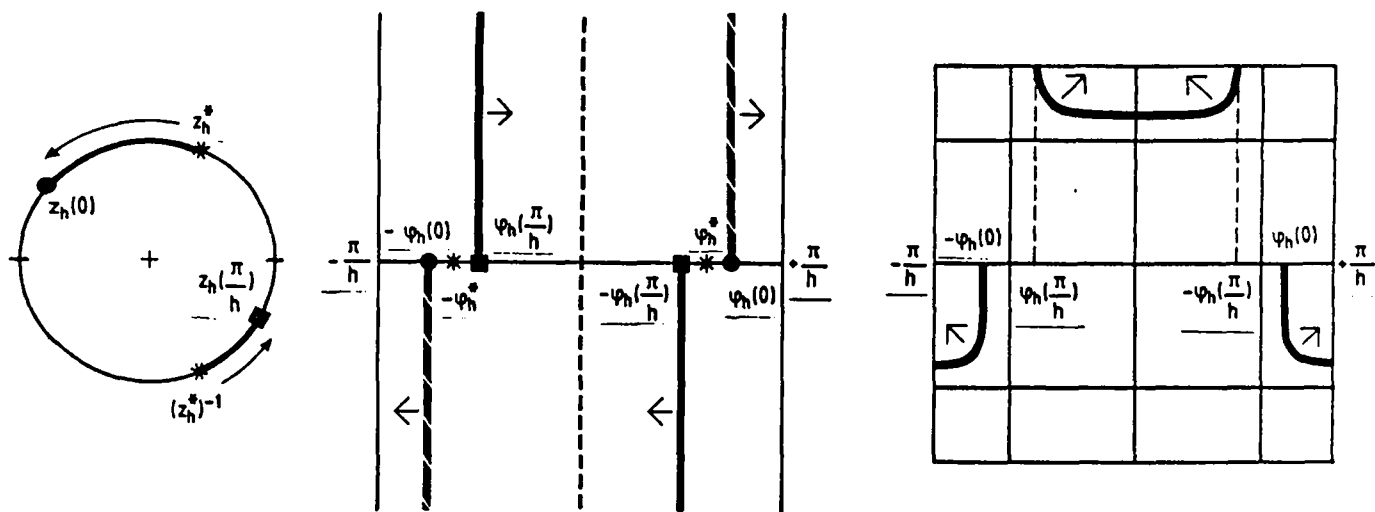
La valeur  $\omega h = \sqrt{\frac{1}{1-\lambda}}$  est particulière. En effet, dans ce cas on a les égalités remarquables suivantes :

$$\begin{cases} z_h^* = z_h(0) = \left( z_h\left(\frac{\pi}{h}\right) \right)^{-1} \\ \cos(h \varphi_h(0)) = \cos\left(h \varphi_h\left(\frac{\pi}{h}\right)\right) = \cos(h \varphi_h^*) \end{cases}$$

ce qui correspond au schéma suivant :

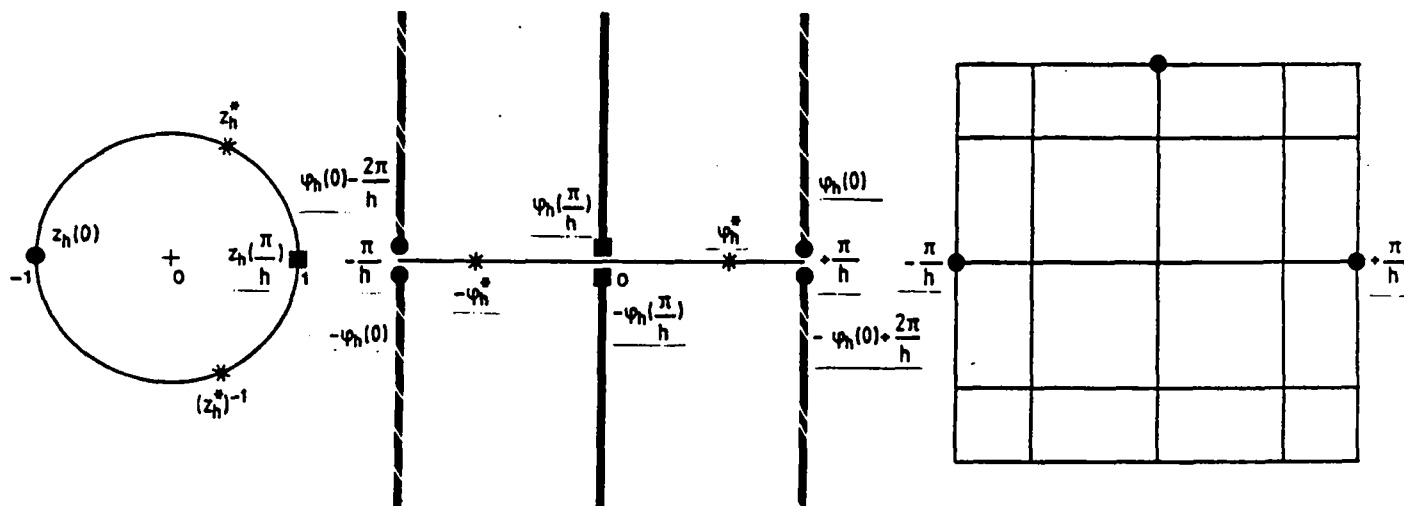


Lorsque  $\omega h$  augmente jusqu'à 2, les points se séparent de nouveau,  $z_h(0)$  décrivant l'arc de cercle  $\widehat{(z_h^*, -1)}$  dans le sens direct tandis que  $z_h\left(\frac{\pi}{h}\right)$  parcourt l'arc  $\widehat{\left((z_h^*)^{-1}, 1\right)}$  dans le sens direct :



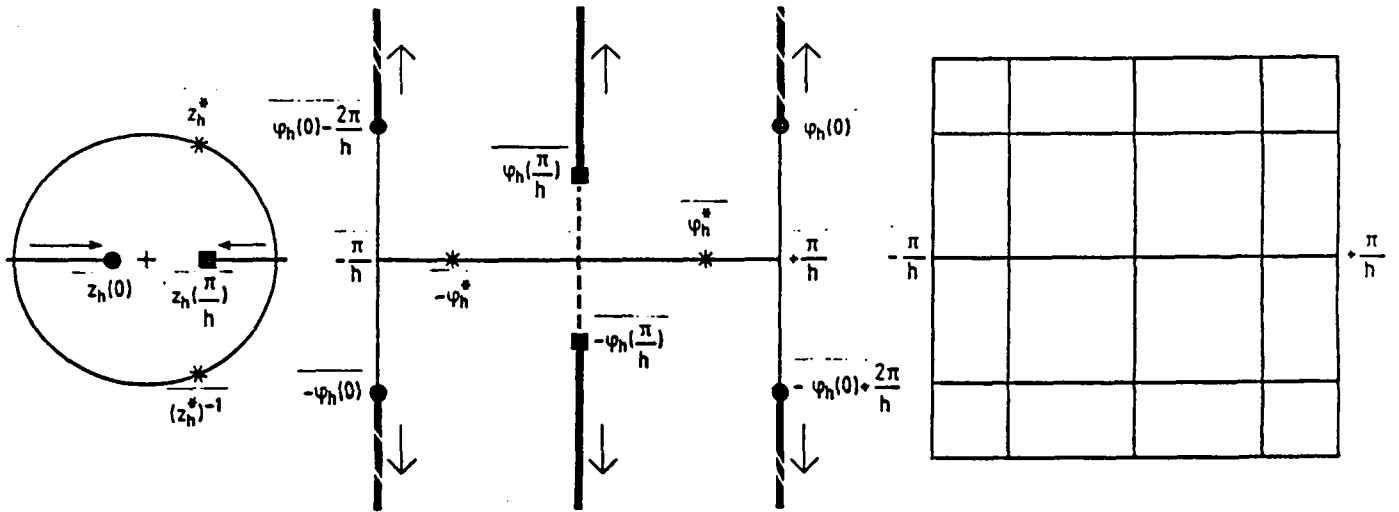
où  $\omega h$  croît de  $\sqrt{1/(1-\lambda)}$  à 2

$\omega h = 2$  est de nouveau une valeur singulière ; elle correspond au cas où  $z_h\left(\frac{\pi}{h}\right)$  est le point d'affixe 1 tandis que  $z_h(0)$  est le point d'affixe -1.



$\omega h = 2$

Enfin lorsque  $\omega h$  dépasse 2 (c'est-à-dire la norme de l'opérateur  $\Delta_{h,\lambda}$ ),  $z_h(0)$  se dirige vers 0 en suivant le segment  $[-1,0]$  tandis que  $z_h\left(\frac{\pi}{h}\right)$  rejoint le même point mais en parcourant, à l'envers, le segment  $[0,1]$ .



$\omega h > 2$

Cette description fait apparaître quatre cas particuliers :

- $(\omega h)^2 = 0$  : c'est le cas limite où l'on passe du discret au continu. Les points  $-\frac{\pi}{h}$  et  $\frac{\pi}{h}$  sont rejetés à l'infini, tandis que les points  $\pm \varphi_h(0)$  tendent vers leur valeur limite  $\pm \omega$ .
- $(\omega h)^2 = 4$  : pour cette valeur particulière :  $h \varphi_h(0)$  et  $-h \varphi_h(0)$  sont égaux à  $2\pi$  près tandis que  $h \varphi_h\left(\frac{\pi}{h}\right)$  et  $-h \varphi_h\left(\frac{\pi}{h}\right)$  sont tous deux nuls.
- $(\omega h)^2 = 8(2\lambda - 1)$  :  $h \varphi_h\left(\frac{\pi}{h}\right)$  et  $-h \varphi_h\left(\frac{\pi}{h}\right)$  valent  $\pi$  à  $2\pi$  près.
- $(\omega h)^2 = (1 - \lambda)^{-1}$  : ce cas n'est intéressant que pour le cas :  $1/2 < \lambda < 3/4$ .  
 $h \varphi_h(0)$  et  $-h \varphi_h\left(\frac{\pi}{h}\right)$  sont alors égaux à  $h \varphi_h^*$ .

Dans toute la suite, nous supposerons exclus, ces cas «pathologiques».

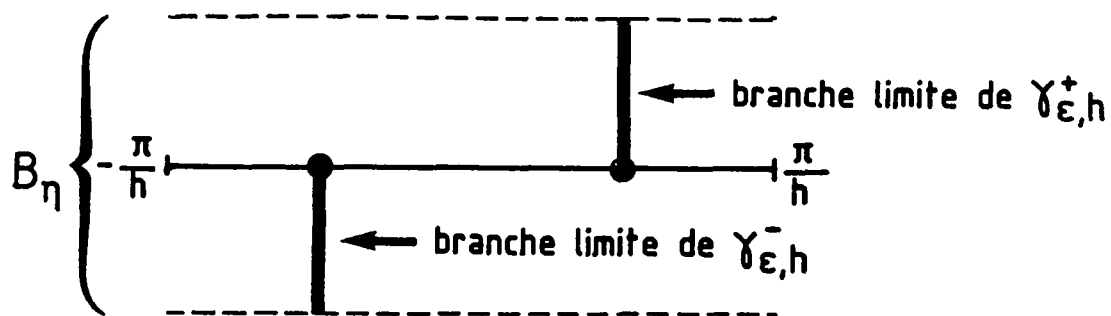
#### 2.4.2. Description des contours d'intégration

Nous allons détailler dans ce paragraphe les nouveaux contours d'intégration qui interviendront dans l'expression de la solution sortante que nous donnerons au paragraphe suivant. Ces contours sont construits de manière à éviter les singularités qui, au cours du passage à la limite  $\epsilon \downarrow 0^+$ , pénètrent dans la bande  $B_\eta$ .

D'après l'étude qui précède, ces singularités, si elles existent dans  $B_\eta$ , ne peuvent être que :

- un segment vertical ascendant issu du point  $\varphi_h(0)$  et son symétrique par rapport à l'origine : (segment vertical descendant issu du point  $-\varphi_h(0)$ ,
- un segment vertical descendant issu du point  $\varphi_h\left(\frac{\pi}{h}\right)$  et son symétrique par rapport à l'origine.





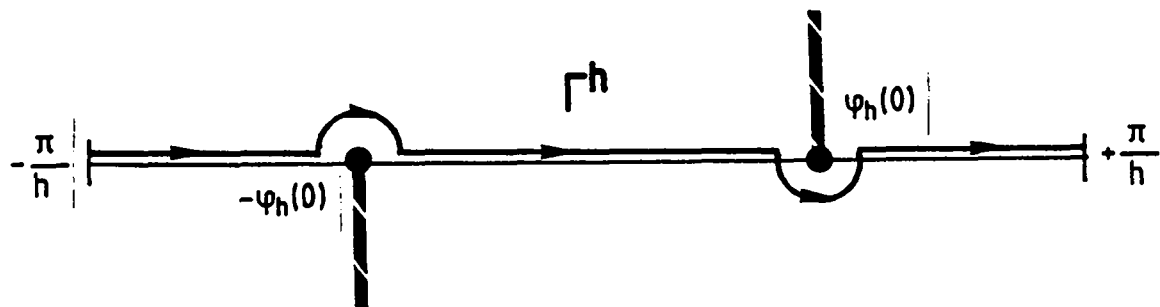
Nous convenons de déformer le segment  $\left[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right]$  en un contour  $\Gamma^h$ , joignant

$-\frac{\pi}{h}$  à  $\frac{\pi}{h}$  suivant l'axe réel mais en évitant :

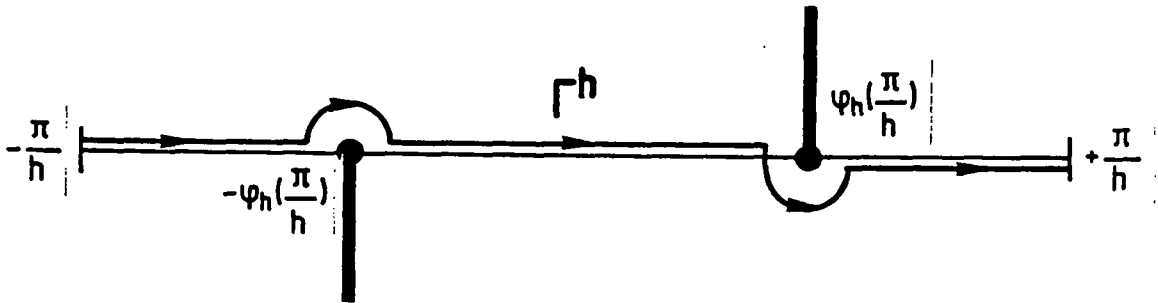
- le ou les points  $+\varphi_h(0)$  et  $+\varphi_h\left(\frac{\pi}{h}\right)$  situé sur l'axe réel, par un demi-cercle dessiné dans le demi-plan inférieur,
- le ou les points  $-\varphi_h(0)$  et  $-\varphi_h\left(\frac{\pi}{h}\right)$  situés sur l'axe réel, par un demi-cercle dessiné dans le demi-plan supérieur.

D'après l'étude qui précède, nous sommes amenés à distinguer 5 cas de figure :

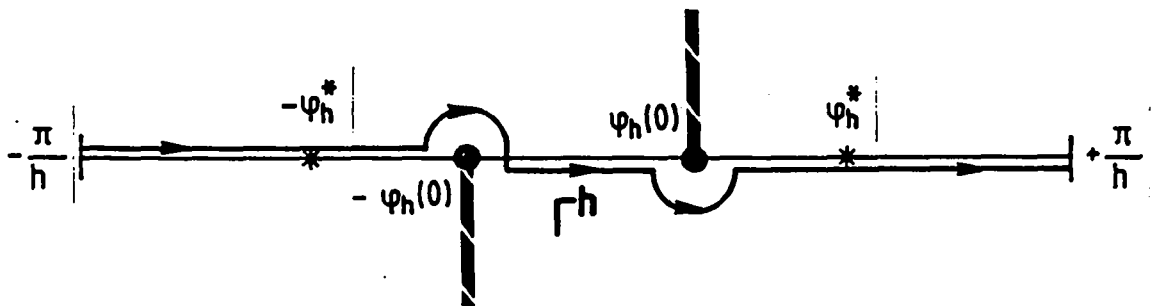
a)  $\lambda > \frac{3}{4}$  et  $0 < \omega h < 2$  :



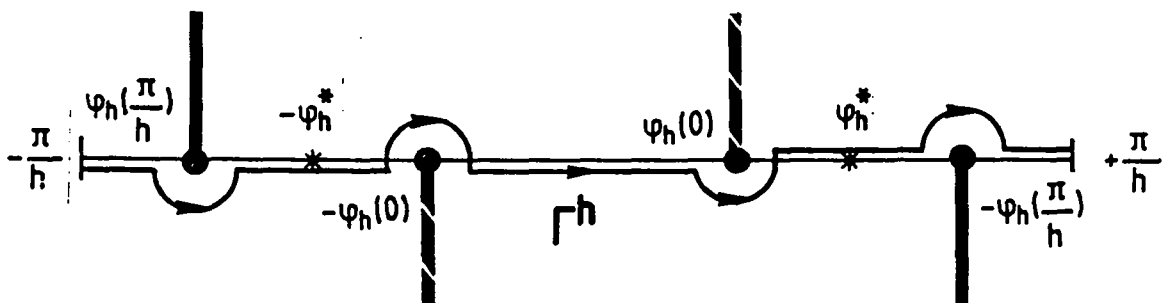
b)  $\lambda > \frac{3}{4}$  et  $2 > \omega h < (8(2\lambda - 1))^{1/2}$  :



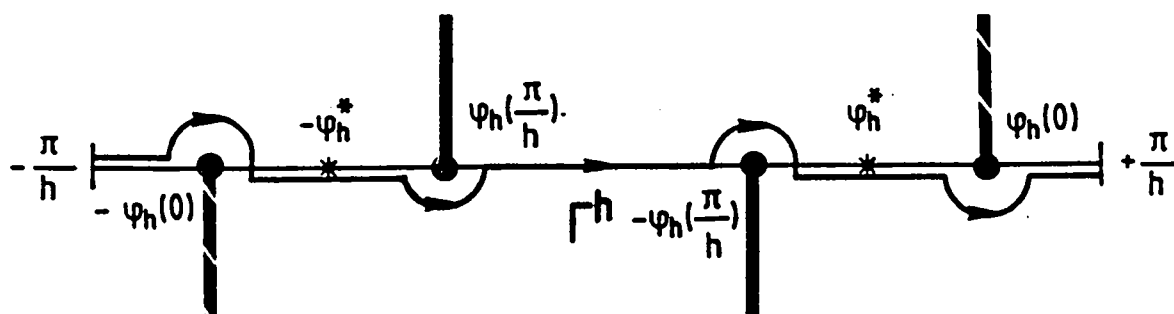
c)  $\frac{1}{2} < \lambda < \frac{3}{4}$  et  $0 < \omega h < (8(2\lambda - 1))^{1/2}$



d)  $\frac{1}{2} < \lambda < \frac{3}{4}$  et  $(8(2\lambda - 1))^{1/2} < \lambda < \frac{1}{(1 - \lambda)^{1/2}}$



$$e) \quad \frac{1}{2} < \lambda < \frac{3}{4} \quad \text{et} \quad \frac{1}{(1-\lambda)^{1/2}} < \omega h < 2$$



### 2.4.3. Expression de la solution sortante

Nous avons tous les éléments pour passer à la limite. Nous définissons :

$$(2.113) \quad \begin{cases} \gamma_h^+(z) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0^+} \gamma_{\varepsilon, h}^+(z) \\ \gamma_h^-(z) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0^+} \gamma_{\varepsilon, h}^-(z) \end{cases}$$

ainsi que :

$$(2.14) \quad \exp i h \varphi_h(z) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0^+} \exp(i h \varphi_{\varepsilon, h}(z))$$

Nous pouvons donner les expressions analytiques de ces fonctions. On a :

$$(2.115) \quad \gamma_h^+(z) = \rho_h \exp \frac{i h}{4} \left( \varphi_h(0) + \varphi_h \left( \frac{\pi}{h} \right) \right) (1 - \exp i h (z - \varphi_h(0)))^{1/2} \\ \cdot \left( 1 - \exp i h \left( z - \varphi_h \left( \frac{\pi}{h} \right) \right) \right)^{1/2}$$

$$(2.116) \quad \gamma_h^-(z) = i \gamma_h^+(-z)$$

$$(2.117) \quad \rho_h = \begin{cases} e^{-\frac{i\pi}{4} \frac{|4\lambda - 3|^{1/4}}{|2h|^{1/2}}} & \text{si } \lambda > \frac{3}{4} \\ e^{-\frac{i\pi}{2} \frac{|4\lambda - 3|^{1/4}}{|2h|^{1/2}}} & \text{si } \frac{1}{2} < \lambda < \frac{3}{4} \end{cases}$$

$\varphi_h(0)$  et  $\varphi_h\left(\frac{\pi}{h}\right)$  étant définis par :

$$(2.118) \quad \begin{cases} \cos[h \varphi_h(0)] = 1 - \frac{\omega^2 h^2}{2} \\ \text{Im}(\varphi_h(0)) \geq 0, \text{ Réelle}(\varphi_h(0)) \in \left[0, \frac{\pi}{h}\right] \end{cases}$$

$$(2.119) \quad \begin{cases} \cos\left[h \varphi_h\left(\frac{\pi}{h}\right)\right] = \frac{4\lambda - 1}{4\lambda - 3} - \frac{\omega^2 h^2}{2(4\lambda - 3)} \\ \text{Im}\left(\varphi_h\left(\frac{\pi}{h}\right)\right) \geq 0 \\ \text{Réelle}\left[\varphi_h\left(\frac{\pi}{h}\right)\right] \in \left[0, \frac{\pi}{h}\right] \text{ si } \lambda > \frac{3}{4} \\ \text{Réelle}\left[\varphi_h\left(\frac{\pi}{h}\right)\right] \in \left[-\frac{\pi}{h}, 0\right] \text{ si } \frac{1}{2} < \lambda < \frac{3}{4} \end{cases}$$

Si l'on pose :

$$(2.120) \quad \gamma_h(z) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0^+} \gamma_{\varepsilon, h}(z) = \frac{-i}{h} (2\lambda - 1 + 2(1 - \lambda) \cos hz) \sin h \varphi_h(z)$$

$\gamma_h(z)$  possède, sur le segment  $\left[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right]$  la décomposition multiplicative :

$$(2.121) \quad \gamma_h(k) = \gamma_h^+(k) \gamma_h^-(k) \quad \forall k \in \left[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right]$$

Enfin, l'utilisation des fonctions  $\gamma_h^+(z)$  et  $\gamma_h^-(z)$  nous permet d'écrire :

$$(2.122) \quad \exp i h \varphi_h(z) = \frac{-\omega^2 h^2 + 4\lambda - 2(2\lambda - 1) \cos hz - 2h \gamma_h^+(z) \bar{\gamma}_h^-(z)}{2(2\lambda - 1 + 2(1 - \lambda) \cos hz)}$$

$\varphi_h(z)$  pouvant, sur l'axe réel, être définie par :

$$(2.123) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos(h \varphi_h(k)) = \frac{\omega^2 h^2 + 4\lambda - 2(2\lambda - 1) \cos hk}{2(2\lambda - 1 + 2(1 - \lambda) \cos hk)} \\ \\ \text{Im } \varphi_h(k) > 0 \quad \text{et} \quad \text{Réelle } \varphi_h(k) = \frac{m\pi}{h}, m \text{ entier} \\ \\ \text{ou bien} \\ \\ \text{Im } \varphi_h(k) = 0 \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Réelle } \varphi_h(k) \in \left[0, \frac{\pi}{h}\right] \\ \text{si } 2\lambda - 1 + 2(1 - \lambda) \cos hk \geq 0 \\ \text{Réelle } \varphi_h(k) \in \left[-\frac{\pi}{h}, 0\right] \\ \text{si } 2\lambda - 1 + 2(1 - \lambda) \cos hk \leq 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Ces notations étant choisies, nous effectuons le passage à la limite,  $\varepsilon \downarrow 0^+$ . Dans une première étape, nous substituons, ce qui est loisible d'après la formule du Baron de Cauchy, le contour  $\Gamma^h$  au segment  $\left[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right]$  dans l'expression (2.91).

D'après ce qui précède, la fonction intégrande est alors continue et tend continuellement vers une fonction limite sur le chemin compact  $\Gamma^h$ . Nous pouvons donc passer à la limite sous le signe somme. On obtient ainsi le résultat que nous allons énoncer dans la proposition suivante :

Proposition 2.3 :

La solution sortante du problème :

$$\omega^2 u^h + A_{\lambda, h}^+ u^h = -2 h g^h$$

définie par :

$$\begin{cases} u^h = \lim_{\varepsilon \downarrow 0^+} u^{\varepsilon, h} \\ (\omega^2 + i\varepsilon\omega) u^{\varepsilon, h} + A_{\lambda, h}^+ u^{\varepsilon, h} = -2hg^h \end{cases}$$

est donnée par l'expression :

$$(2.124) \quad u^h(ph, qh) = \int_{\Gamma^h} \hat{u}^h(k, qh=0) \exp i(phk + qh \varphi_h(k)) dk$$

$$(2.125) \quad \hat{u}^h(k, qh=0) = \frac{-h}{2\pi \gamma_h^+(k)} \int_{-\frac{\pi}{h} + i\sigma}^{\frac{\pi}{h} + i\sigma} \frac{\hat{g}_h(\zeta) d\zeta}{\gamma_h^-(\zeta) (1 - \exp ih(k - z))}$$

dès que  $g^h$  vérifie :

$$(2.90) \quad |g^h(ph)| \leq C e^{-\eta hp} \quad \forall p > 0$$

Remarque :

En observant que la singularité de la fonction limite  $\gamma_h^+(k)$  est de type  $1/\sqrt{k}$ , donc intégrable, on pourrait substituer à  $\Gamma^h$  le segment  $\left[ -\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h} \right]$ .

Toutefois, nous préférons conserver le contour  $\Gamma^h$  car il s'avérera bien adapté à l'étude du comportement asymptotique des solutions.

## 2.5. ETUDE DE LA DIFFRACTION D'UNE ONDE PLANE NUMERIQUE

L'objet de cette section est d'étudier le cas où l'onde incidente est une onde plane harmonique et d'obtenir une solution directement comparable à celle du cas continu.

Pour ce faire, la démarche adoptée est strictement calquée sur celle qui nous avait permis de traiter le cas continu (section 1.5). Après avoir analysé et présenté les ondes planes harmoniques, solutions du schéma en l'absence de la fissure, on commence par évaluer la donnée  $g_h$ , équivalent discret de la dérivée normale sur la fissure de l'onde incidente. Une deuxième étape consiste alors à régulariser cette donnée afin de permettre l'utilisation du théorème général (2.3) et d'explicitier le champ diffracté. La solution s'exprime comme une intégrale le long d'un contour dans le plan complexe. Une dernière étape, consistant à passer à la limite dans l'expression obtenue, nécessitera de définir de nouveaux contours d'intégration.

Dans toute la suite, nous serons amenés à manipuler de nombreux champs scalaires ; il nous semble donc important de rappeler ici les notations choisies :

–  $u_I^h$  désigne l'onde harmonique incidente ; elle s'écrit sous la forme :

$$u_I^h(p_h, q_h) = \exp i(k_x p_h + k_y q_h)$$

$(k_x, k_y)$  est le nombre d'onde de l'onde incidente ; nous reviendrons dans un premier paragraphe sur des notations complémentaires relatives à cette onde.

–  $u_D^h$  désigne l'onde harmonique diffractée ;

–  $u_T^h$  désigne l'onde totale, somme de l'onde incidente et de l'onde diffractée :

$$u_T^h = u_I^h + u_D^h$$

$u_D^h$  est, comme il est indiqué dans la section 2.2, un champ antisymétrique ;

$u_D^h$  s'écrit sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_D^h(ph, qh) = u^h(ph, qh) & \text{si } p \in \mathbb{Z}, q > 0 \\ u_D^h(ph, qh = 0) = u^h(ph, qh = 0) & \text{si } p \leq 0 \\ u_D^h(ph, qh = 0^+) = u^h(ph, qh = 0) & \text{si } p > 0 \\ u_D^h(ph, qh = 0^-) = -u^h(ph, qh = 0) & \text{si } p > 0 \\ u_D^h(ph, qh) = -u^h(ph, -qh) & \text{si } p \in \mathbb{Z}, q < 0 \end{array} \right.$$

- $u^h$  est un champ défini sur le maillage du demi-plan supérieur  $\{(ph, qh) \mid p \in \mathbb{Z}, q \geq 0\}$  et vérifie un problème analogue à celui que nous avons étudié dans la section précédente.

### 2.5.1. L'onde plane incidente : présentation et notations

Par similitude avec le cas continu, nous introduisons l'angle d'incidence  $\theta$  comme l'angle que fait la direction de propagation avec l'axe de la fissure.

Si l'onde plane incidente est de la forme :

$$(2.126) \quad u_I^h(ph, qh) = \exp i(k_x ph + k_y qh)$$

$(k_x, k_y)$  vérifie la relation de dispersion (cf. (2.8) - (2.10)).

$$(2.17) \quad \omega^2 = D_{h,\lambda}(k_x, k_y)$$

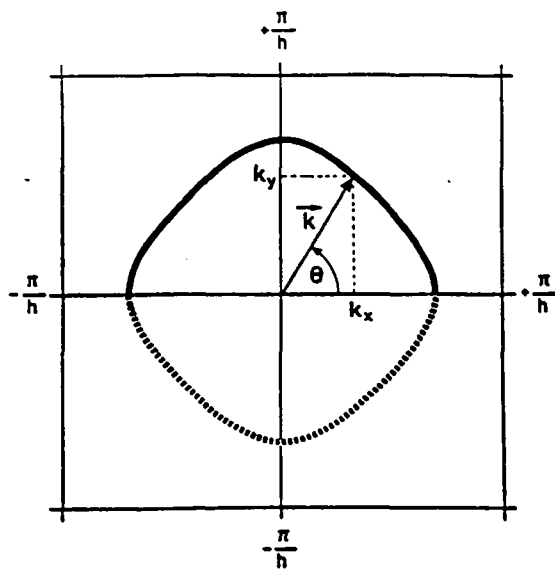
Cette relation a une interprétation géométrique simple :

Si  $M$  désigne le point tel que :

$$\vec{OM} = \begin{cases} k_x \\ k_y \end{cases} = \vec{k}$$

alors  $M$  est un point de la courbe de dispersion dont nous avons parlé abondamment dans la section 2.1.





Par périodicité nous pouvons toujours supposer :

$$k_x, k_y \in \left[ -\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h} \right]$$

Le travail que nous avons effectué nous permet de résoudre l'équation implicite (2.17) sous la forme :

$$k_y = \pm \varphi_h(k_x)$$

Convenons de définir le module du vecteur d'onde  $k = (k_x, k_y)$  dans la direction  $\theta$  par la relation :

$$\begin{cases} \omega_h(\theta) = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2} \\ 0 \leq \omega_h(\theta) < \frac{\sqrt{2}\pi}{h} \end{cases}$$

On obtient finalement les relations remarquables :

$$(2.128) \quad \begin{cases} k_x = \omega_h(\theta) \cos \theta \\ k_y = \omega_h(\theta) \sin \theta \\ \omega_h(\theta) \sin \theta = \pm \varphi_h[\omega_h(\theta) \cos \theta] \end{cases}$$

Ces formules peuvent être éclairées en regardant leurs équivalents lorsque  $h$  tend vers 0. On a alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} k_x = \omega \cos \theta, \quad k_y = \omega \sin \theta \\ \lim_{h \rightarrow 0} \omega_h(\theta) = \omega \\ \lim_{h \rightarrow 0} \varphi_h(k) = (\omega^2 - k^2)^{1/2} \end{array} \right.$$

Comme nous l'avons expliqué en 2.1, l'existence, au moins pour certaines valeurs de l'angle  $\theta$ , d'ondes planes harmoniques de vecteur d'onde réel n'est assurée ici que si :

$$\omega h \leq ||\Delta_{\lambda, h}||$$

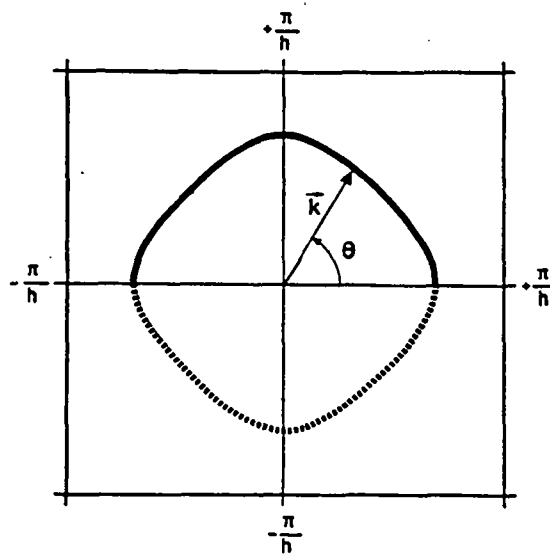
soit, de manière équivalente :

$$\omega h \leq \sup \{2, \sqrt{8(2\lambda - 1)}\}$$

condition que nous supposons toujours vérifiée par la suite.

Cette condition n'implique toutefois aucunement l'existence et l'unicité de vecteurs d'ondes de direction  $\theta$  pour tous les angles d'incidences. Là encore, il nous faut distinguer cinq cas :

Si  $\lambda > \frac{3}{4}$  et  $\omega h < 2$ , la courbe de dispersion est convexe et  $\omega_h(\theta)$  existe et est unique pour tous les angles d'incidence : il y a unicité de l'onde incidente.



Si  $\lambda > \frac{3}{4}$  et  $2 < \omega h < \sqrt{8(2\lambda - 1)}$

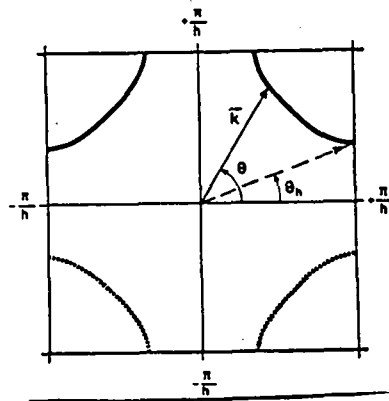
La courbe de dispersion est composée de quatre composantes connexes comme indiqué ci-dessous ; il existe un angle  $\theta_h$  compris entre 0 et  $\frac{\pi}{4}$  tel que :

$$\text{si } \theta \in \left[ \theta_h, \frac{\pi}{2} - \theta_h \right] \cup \left[ \frac{\pi}{2} + \theta_h, \pi - \theta_h \right] \cup \left[ \pi + \theta_h, \frac{3\pi}{2} - \theta_h \right] \cup \left[ \frac{3\pi}{2} + \theta_h, 2\pi - \theta_h \right]$$

il y a existence et unicité de  $\omega_h(\theta)$

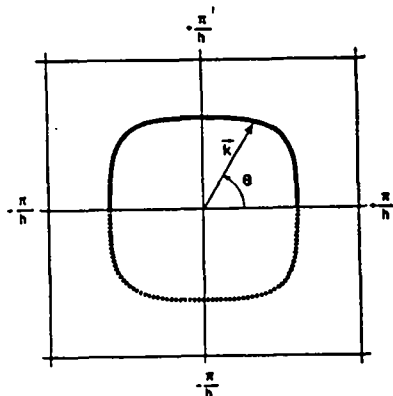
sinon,

il n'y a aucune onde incidente dans la direction  $\theta$ .



si  $\frac{1}{2} < \lambda < \frac{3}{4}$  et  $\omega h < \sqrt{8(2\lambda - 1)}$

La courbe de dispersion est convexe et il existe une onde incidente unique dans la direction  $\theta$ .



$$\text{si } \frac{1}{2} < \lambda < \frac{3}{4} \text{ et } \sqrt{8(2\lambda - 1)} < \omega h < \sqrt{\frac{1}{1-\lambda}}$$

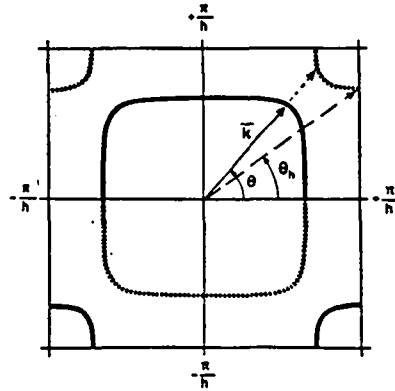
La courbe de dispersion est composée de 5 composantes connexes ; il existe un angle  $\theta_h$  compris entre 0 et  $\frac{\pi}{4}$  tel que :

$$\text{si } \theta \in \left[ \theta_h, \frac{\pi}{2} - \theta_h \right] \cup \left[ \frac{\pi}{2} + \theta_h, \pi - \theta_h \right] \cup \left[ \pi + \theta_h, \frac{3\pi}{2} - \theta_h \right] \cup \left[ \frac{3\pi}{2} + \theta_h, 2\pi - \theta_h \right]$$

il y a existence de deux ondes planes dans la direction  $\theta$  ;  $\omega_h(\theta)$  existe mais n'est pas unique !

sinon,

il y a existence d'une seule onde plane dans la direction  $\theta$ .



$$\text{si } \frac{1}{2} < \lambda < \frac{3}{4} \text{ et } \sqrt{\frac{1}{1-\lambda}} < \omega h < \sqrt{8(2\lambda - 1)}$$

La courbe de dispersion est composée de 4 composantes connexes ; il existe deux angles  $\theta_h^1$  et  $\theta_h^2$  compris entre 0 et  $\frac{\pi}{4}$  tel que :

$$\text{si } \theta \in \left[ -\theta_h^1, \theta_h^1 \right] \cup \left[ \frac{\pi}{2} - \theta_h^1, \frac{\pi}{2} + \theta_h^1 \right] \cup \left[ \pi - \theta_h^1, \pi + \theta_h^1 \right] \cup \left[ \frac{3\pi}{2} - \theta_h^1, \frac{3\pi}{2} + \theta_h^1 \right]$$

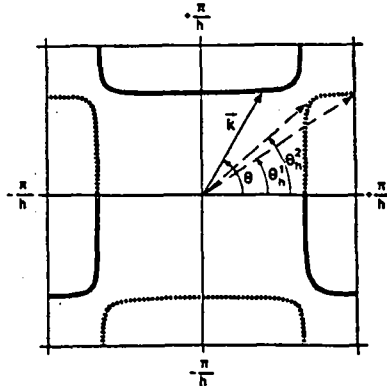
il y a existence et unicité de l'onde plane dans la direction  $\theta$ .

$$\sin \theta \in \left[ \theta_h^2, \frac{\pi}{2} - \theta_h^2 \right] \cup \left[ \frac{\pi}{2} + \theta_h^2, \pi - \theta_h^2 \right] \cup \left[ \pi + \theta_h^2, \frac{3\pi}{2} - \theta_h^2 \right] \cup \left[ \frac{3\pi}{2} + \theta_h^2, 2\pi - \theta_h^2 \right]$$

il n'y a aucune onde d'angle d'incidence  $\theta$ .

sinon,

il y a deux ondes incidentes dans la direction  $\theta$ .



Quoi qu'il en soit, nous nous plaçons dans la suite dans le cas où  $\omega h$  est inférieur à la norme de l'opérateur  $||\Delta_{\lambda h}||$ , soit :

$$(2.129) \quad \omega h < \max [2, \sqrt{8(2\lambda - 1)}]$$

et nous convenons de choisir  $\theta$  tel que :

$$(2.130) \quad \omega_h(\theta) \sin \theta = + \varphi_h [\omega_h(\theta) \cos \theta]$$

ou, en d'autres termes :

$$(2.131) \quad k_y = \varphi_h [k_x]$$

### 2.5.2. Calcul de la solution

Nous commençons par calculer l'équivalent discret  $g^h$  de la dérivée normale de l'onde incidente. Nous rappelons que nous l'avons défini par l'expression :

$$-2hg^h = \omega^2 u_I^h - A_{\lambda,h} u_I^h$$

prise en  $qh = 0$  ,  $ph \geq 1$ .

On a, plus explicitement :

$$g^h(ph) = \frac{1}{2h} \left\{ (2\lambda - 1) \{ (u_I^h)_{p,1} - (u_I^h)_{p,-1} \} + (1 - \lambda) | (u_I^h)_{p+1,1} - (u_I^h)_{p+1,-1} + (u_I^h)_{p-1,1} + (u_I^h)_{p-1,-1} | \right\}$$

soit encore :

$$g^h(ph) = \frac{2i ((2\lambda - 1) + 2(1 - \lambda) \cos(k_x h))}{2h} \sin(k_y h) \exp i ph k_x , \text{ si } p \leq 1$$

ou bien finalement (cf. (2.120)) :

$$(2.132) \quad g^h(ph) = -\gamma_h(k_x) \exp i ph k_x , \quad p \geq 1$$

(On a utilisé ici l'égalité  $k_y = +\varphi_h(k_x)$  et notamment le choix du signe + dont nous avons convenu).

On remarquera que  $g^h$  n'est pas régulière à l'infini et qu'en particulier :

$$g^h \notin L^2(\mathbb{R}_h^+)$$

Comme dans le cas continu, on régularise  $g^h$  en choisissant un nombre  $\eta \geq 0$  et en posant :

$$(2.133) \quad g_{\eta}^h = -\gamma_h(k_x h) \exp i ph (k_x + i\eta) , \quad p \geq 1$$

On remarque que l'on a bien :

$$\begin{cases} \lim_{\eta \downarrow 0^+} g_\eta^h(ph) = g^h(ph) , \quad \forall p \geq 1 \\ g_\eta^h \in L^2(\mathbb{R}_h^+) \text{ et même } W_h(\eta) \end{cases}$$

On est donc ramené à étudier un problème associé à une donnée satisfaisant les hypothèses de la proposition (2.4). On a, si  $u_\eta^h$  désigne la solution sortante associée à  $g_\eta^h$ .

$$(2.134) \quad u_\eta^h = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{\Gamma^h} \hat{u}_\eta^h(k, ph=0) \exp i(h p k + h q \phi_h(k)) dk$$

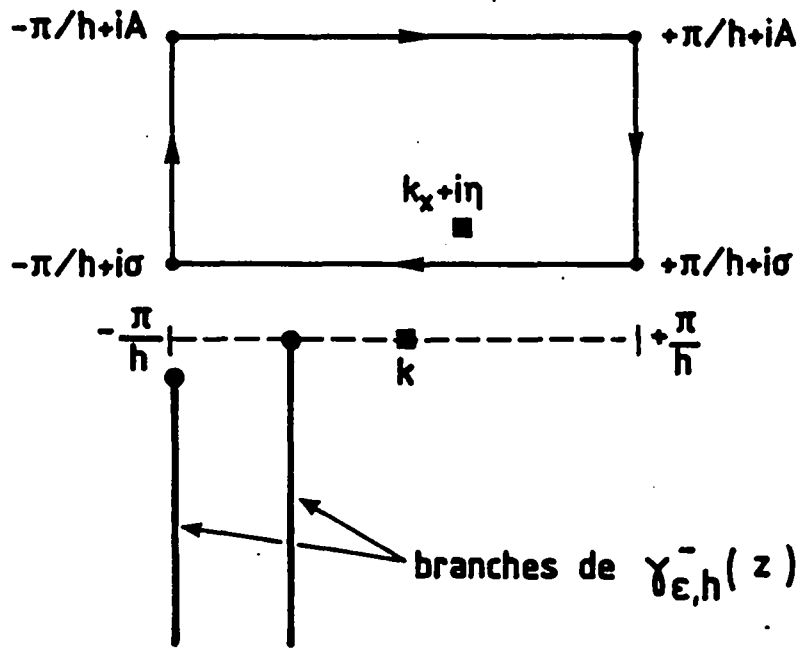
$$(2.135) \quad \hat{u}_\eta^h(k, ph=0) = \frac{-h}{2\pi \gamma_h^+(k)} \int_{-\frac{\pi}{h} + i\sigma}^{\frac{\pi}{h} + i\sigma} \frac{F_h g_\eta^h(z)}{\gamma_h^-(z) (1 - \exp i h (-z + k))} dz$$

$$(2.136) \quad F_h g_\eta^h(z) = \frac{h}{(2\pi)^{1/2}} \sum_{p=1}^{+\infty} g_\eta^h(ph) \exp -i h p z$$

Un calcul simple montre que l'on a :

$$(2.137) \quad F_h g_\eta^h(z) = \frac{h}{(2\pi)^{1/2}} \frac{\gamma_h(k_x)}{1 - \exp i h (z - (k_x + i\eta))}$$

L'intégrale intervenant dans (2.135) peut se calculer par la méthode des résidus en utilisant le contour de la figure ci-dessous.



L'intégrale le long du segment  $-\frac{\pi}{h} + i[\sigma, A]$  s'annulant par périodicité avec l'intégrale le long du segment  $\frac{\pi}{h} + i[A, \sigma]$  et l'intégrale le long du chemin  $\left[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right] + iA$  devenant nulle lorsque  $A$  tend vers l'infini, il reste :

$$\begin{aligned}
 & -\frac{h}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{h} + i\sigma}^{\frac{\pi}{h} + i\sigma} \frac{F_h g_{\eta}^h(z) dz}{\gamma_h(z) (1 - \exp i h (-z + k))} \\
 & = -i h \operatorname{Res} \left\{ \frac{F_h g_{\eta}^h(z)}{\gamma_h(z) (1 - \exp i h (-z + k))}, z = k_x + i\eta \right\}
 \end{aligned}$$

soit encore :



$$\begin{aligned}
& -\frac{h}{(2\pi)} \int_{-\frac{\pi}{h} + i\sigma}^{\frac{\pi}{h} + i\sigma} \frac{F_h g_{\eta}^h(z) dz}{\gamma_h(z) (1 - \exp i h (-z + k))} \\
& = + \frac{h}{(2\pi)^{1/2}} \cdot \frac{\gamma_h(k_x)}{\gamma_h(k_x + i\eta) (1 - \exp i h (k - k_x - i\eta))}
\end{aligned}$$

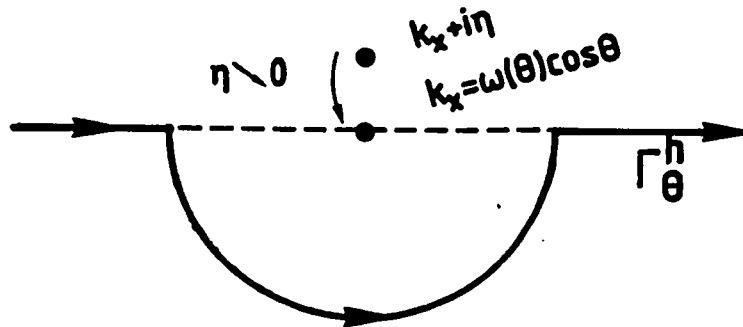
d'où l'expression de  $u_{\eta}^h$  :

$$(2.138) \quad u_{\eta}^h(p h, q h) = + \frac{h}{(2\pi)} \frac{\gamma_h(k_x)}{\gamma_h(k_x + i\eta)} \int_{\Gamma_h} \frac{\exp i(p h k + q h \varphi_h(k)) dk}{\gamma_h^+(k) (1 - \exp i h (k - k_x - i\eta))}$$

### Passage à la limite

Pour pouvoir aisément passer à la limite ( $\eta \rightarrow 0^+$ ) dans l'expression ci-dessus, nous allons, comme nous l'avons fait lors du passage à la limite  $\varepsilon \downarrow 0^+$ , déformer notre contour d'intégration  $\Gamma^h$  de telle sorte que la singularité  $k = k_x$  se trouve en dehors de ce contour.

Plus précisément, nous déformons notre contour  $\Gamma^h$ , localement autour du point  $k = k_x$ , en un demi-cercle dans le plan inférieur :



Nous appelons  $\Gamma_{\theta}^h$  le nouveau contour ainsi obtenu. D'après la formule de Cauchy, on peut substituer le contour  $\Gamma_{\theta}^h$  à  $\Gamma^h$  dans (2.138) ; le passage à la limite est alors loisible ; on a :

$$(2.139) \quad \begin{cases} \text{si } u^h(ph, qh) = \lim_{\eta \downarrow 0^+} u_{\eta}^h(ph, qh) \\ u^h(ph, qh) = \frac{h}{2\pi} \frac{\gamma_h^+(k_x) \gamma_h^-(k_x)}{\gamma_h^-(k_x)} \int_{\Gamma^h} \frac{\exp i(phk + qh \varphi_h(k)) dk}{\gamma_h^+(k) (1 - \exp i h (k - k_x))} \end{cases}$$

(2.39) est le résultat recherché. Le calcul du champ total  $u_T^h$  est alors construit suivant la démarche décrite précédemment. On obtient le résultat suivant :

Proposition 2.4 :

Supposons :

$$(\omega h)^2 \neq 4, 8(2\lambda - 1), 1/1 - \lambda$$

l'équation :

$$\omega^2 u_T^h + A_{\lambda, h} u_T^h = 0$$

admet des solutions »sortantes» de la forme :

$$u_T^h = u_I^h + u_D^h$$

où  $u_I^h$  est une onde plane numérique incidente :

$$\begin{cases} u_I^h(ph, qh) = \exp i (p h k_x + qh \varphi_h(k_x)) \\ k_x = \omega_h(\theta) \cos \theta \\ k_y = \omega_h(\theta) \sin \theta = \varphi_h(k_x) \end{cases}$$

tandis que  $u_D^h$  désigne l'onde diffractée numérique et est donnée par :

$$\begin{cases} u_D^h(ph, qh) = \frac{h}{2\pi} \gamma_h^+(k_x) \int_{\Gamma_\theta} \frac{\exp i (ph k + qh \varphi_h(k)) dk}{\gamma_h^+(k) (1 - \exp i h (k - k_x))} & \text{si } q \geq 0^+ \\ u_D^h(ph, qh) = -u_D^h(ph, -qh) & \text{si } q \leq 0^- \end{cases}$$

Ce résultat est bien sûr à mettre en parallèle avec celui obtenu sur le cas continu.  
Concernant ce dernier, on avait :

$$u_T = u_I + u_D$$

$$\begin{cases} u_I(x = ph, y = qh) = \exp i (ph k_x + qh k_y) \\ k_x = \omega \cos \theta \\ k_y = \omega \sin \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_D(x = ph, y = qh) = \frac{-\gamma^+(k_x)}{2i\pi} \int_{\Gamma_\theta} \frac{\exp i (phk + qh\varphi(k)) dk}{\gamma^+(k) (k - k_x)} \\ \varphi(k) = -i\gamma(k) \end{cases}$$

Les différences entre cas continu et cas discret sont :

- les substitutions de  $\omega_h(\theta)$  à  $\omega$  et de  $\varphi_h(k)$  à  $\varphi(k)$  ; elles sont dues à la substitution de la relation de dispersion numérique à la relation de dispersion continue.
- La substitution de  $\gamma_h^+(k)$  à  $\gamma^+(k)$ . Celle-ci survient lors de la décomposition multiplicative de Wiener Hopf.
- La substitution de la fonction singulière en  $k = k_x$  :

$$k \rightarrow \frac{-ih}{(1 - \exp i h (k - k_x))}$$

à la fonction, également singulière :

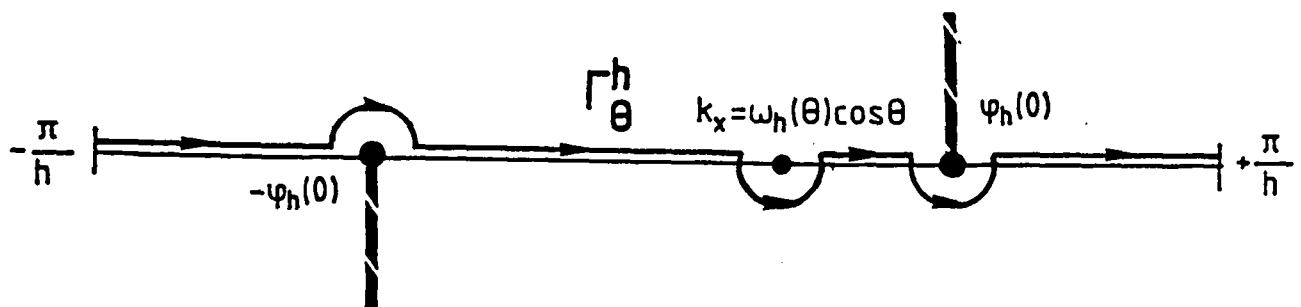
$$k \rightarrow \frac{1}{k - k_x}$$

Celle-ci survient lors de la décomposition additive de Wiener Hopf.

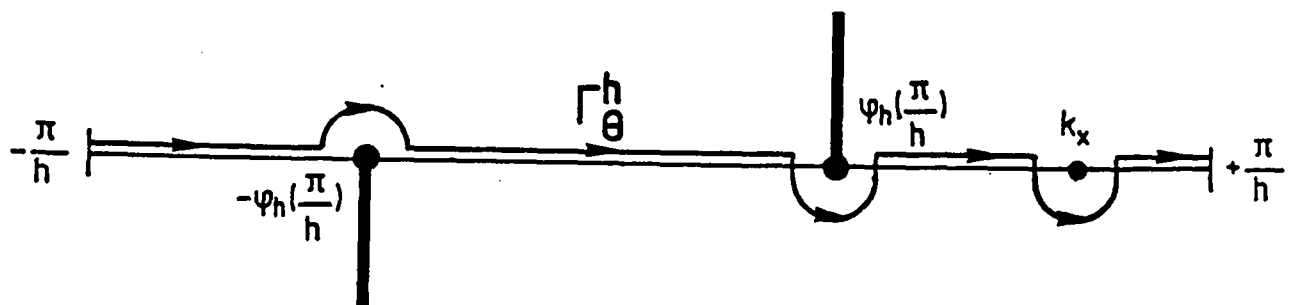
– La substitution du contour borné  $\Gamma_\theta^h$  à  $\Gamma_\theta$ .

$\Gamma_\theta^h$  dépend de  $\omega h$  et de  $\lambda$  suivant les 5 cas :

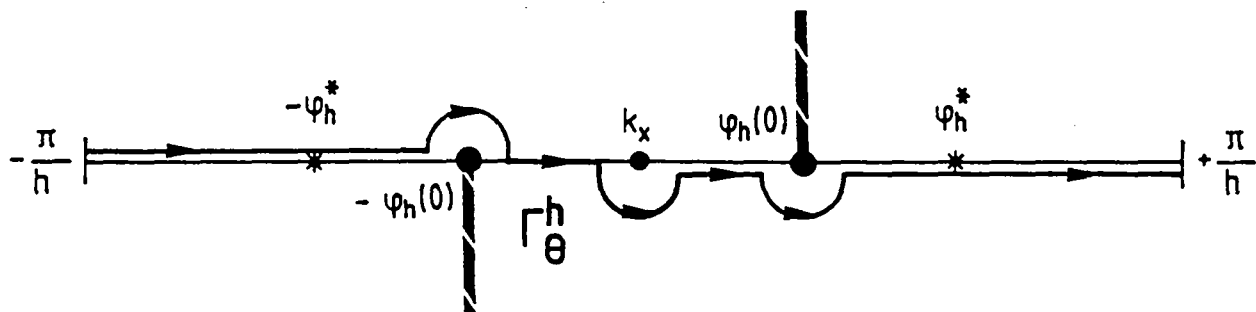
$$1) \lambda > \frac{3}{4} \quad a) 0 < \omega h < 2$$



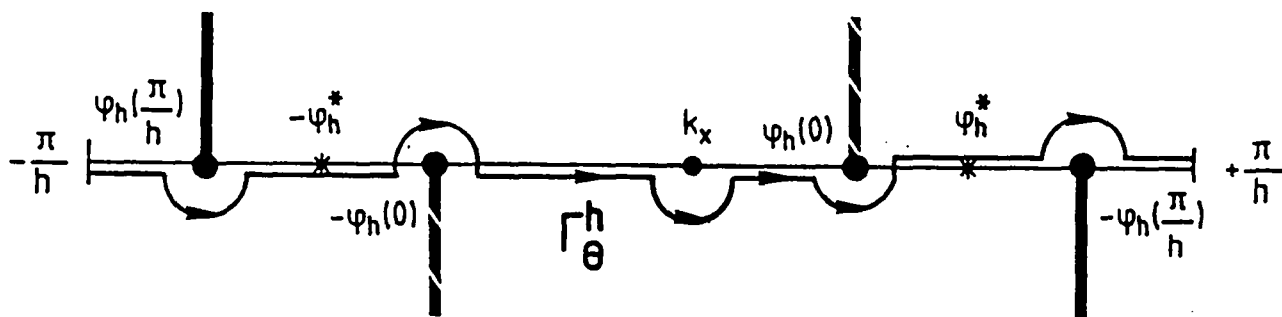
$$1) \lambda < \frac{3}{4} \quad b) 2 < \omega h < \sqrt{8(2\lambda - 1)}$$



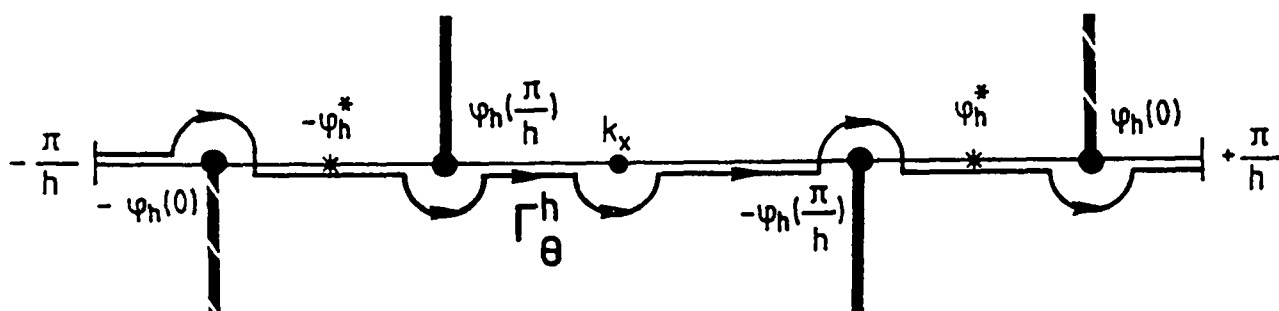
2)  $\frac{1}{2} < \lambda < \frac{3}{4}$       a)  $0 < \omega h < \sqrt{8(2\lambda - 1)}$



2)  $\frac{1}{2} < \lambda < \frac{3}{4}$       b)  $\sqrt{8(2\lambda - 1)} < \omega h < \sqrt{1/(1 - \lambda)}$



2)  $\frac{1}{2} < \lambda < \frac{3}{4}$       c)  $\sqrt{1/(1 - \lambda)} < \omega h < 2$



### 2.5.3. La solution sur l'axe de la fissure

Nous nous intéressons dans ce paragraphe à la trace de la solution numérique sur l'axe de la fissure. Lorsque l'on se place en  $qh = 0$ , les formules se simplifient et l'on peut facilement inverser les formules de Fourier de la proposition 2.4. On obtient alors la solution sous forme d'une convolution discrète finie qui fait intervenir la fonction (cf. proposition (2.2)) :

$$(2.140) \quad S_h^+(x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0^+} S_{\varepsilon,h}^+(x)$$

On obtient ainsi un résultat «calculable». Des résultats numériques sont présentés en fin de paragraphe.

Le résultat que nous allons démontrer est décrit dans la proposition suivante :

#### Proposition 2.5

La trace sur l'axe de la fissure de la solution du problème de diffraction d'une onde plane numérique est donnée par la relation :

$$u^h(ph, qh = 0) = \begin{cases} \exp i h p k_x - \frac{\gamma_h^+(k_x) h}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^p S_h^+(nh) \exp i h k_x (p-n) & \text{si } p > 0 \\ \exp i p h k_x & \text{si } p \leq 0 \end{cases}$$

avec :

$$\begin{cases} S_h^+(nh) = h \sum_{m=0}^n s_h^+(mh) \delta_h((n-m)h) & \text{si } n \leq 0 \\ S_h^+(nh) = 0 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} s_h^+(\text{ph}) = \frac{1+i}{\sqrt{h}} \exp\left(i h \varphi_h(0) \left(p + \frac{1}{4}\right)\right) \frac{\Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(p+1)} \quad \text{si } p \geq 0 \\ s_h^+(\text{ph}) = 0 \quad \text{si } p < 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_h^+(\text{ph}) = \frac{(4\lambda - 3)^{-1/4}}{h} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \exp\left(i h \varphi_h\left(\frac{\pi}{h}\right) \left(p + \frac{1}{4}\right)\right) \frac{\Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(p+1)} \\ \delta_h^+(\text{ph}) = 0 \quad \text{si } p < 0 \end{array} \right. \quad \text{si } p \geq 0$$

Remarque :

Ce résultat est à comparer avec celui obtenu pour le cas continu :

$$u_T(x,0) = \left\{ \begin{array}{l} \exp i k_x x - \frac{\gamma^+(k_x)}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x S^+(y) \exp i k_x (x-y) dy \quad \text{si } x \geq 0 \\ \exp i k_x x \quad \text{si } x \leq 0 \end{array} \right.$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} S^+(y) = (1+i) \frac{\exp i \omega y}{\sqrt{y}} \quad \text{si } y > 0 \\ S^+(y) = 0 \quad \text{sinon} \end{array} \right.$$

Les différences entre le cas continu et le cas discret consistent donc en :

- 1) La substitution du  $k_x$  discret au  $k_x$  continu ; elle est issue de la différence qui existe entre relation de dispersion continue et numérique.

2) La substitution de  $\gamma_h^+(k_x)$  à  $\gamma^+(k_x)$ . On rappelle que la première est une approximation d'ordre 1 de la seconde.

3) La substitution de la fonction discrète :

$$S_h^+(y) = 1_{\left\{y > \frac{h}{2}\right\}} \sum_{p=1}^{\infty} S_h^+(ph) 1_{\left\{\left(p-\frac{1}{2}\right)h \leq y < \left(p+\frac{1}{2}\right)h\right\}}$$

(où  $S_h^+$  est une approximation d'ordre 1 de  $S^+(x_p = ph)$ )

à la fonction :

$$S^+(y) = 1_{\{y > 0\}} \frac{\exp i\omega y}{\sqrt{y}}$$

Preuve de la proposition 2.5 :

Nous partons de la formule (2.139) prise en  $qh = 0$ .

Si  $p > 0$ , on a :

$$u_T(ph, qh = 0^+) = \exp iphk_x + \frac{\gamma_h^+(k_x)}{2\pi} \int_{\Gamma_\theta^h} \frac{h \exp ik dk}{\gamma^+(k) (1 - \exp ih(k - k_x))}$$

Or, sur  $\Gamma_\theta^h$  on a l'égalité :

$$\frac{-h}{(1 - \exp i(k - k_x)h)} = h \sum_{m=1}^{+\infty} \exp imhk_x \exp -imhk$$

d'où :



$$\left\{ \begin{array}{l} u_T(ph, qh = 0^+) = \exp iphk_x - \frac{h \gamma_h^+(k_x)}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=1}^{+\infty} \exp imhk_x S_h^+((p-m)h) \\ \text{avec :} \\ S_h^+((p-m)h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Gamma_\theta^h} \frac{\exp i(p-m)hk}{\gamma_h^+(k)} \end{array} \right.$$

La dernière égalité n'est autre, après avoir déformé  $\Gamma_\theta^h$  en le segment

$\left[ -\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h} \right]$ , que la transformée de Fourier inverse de la fonction :

$$k \rightarrow \left[ \gamma_h^+(k) \right]^{-1} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0^+} \left[ \gamma_{\varepsilon,h}^+(k) \right]^{-1}$$

La conclusion découle alors de la proposition 2.2.

#### b) Résultats numériques :

L'objet de ce paragraphe est d'illustrer les résultats théoriques que nous venons d'obtenir. Notre but n'est pas d'être exhaustif mais de mieux faire comprendre comment est construite la solution numérique et en quoi elle diffère de la solution du problème continu.

- La fonction  $s_h^+(x = ph)$

Rappelons que cette fonction est indépendante du schéma numérique (indépendance en  $\lambda$ ). La première planche représente le graphe de la partie réelle de cette fonction sur dix longueurs d'onde, et pour deux valeurs de  $\omega h$  :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \omega h = 2\pi \cdot H = 2\pi \cdot 0,1 & (10 \text{ points par longueur d'onde}) \\ \omega h = 2\pi \cdot H = 2\pi \cdot 0,2 & (5 \text{ points par longueur d'onde}) \end{array} \right.$$

Dans le premier cas ( $H = 0,1$ ) on notera que l'approximation :

$$s_h^+(x) \sim \frac{\exp i\omega x}{\sqrt{x}} \quad x > 0$$

est très bonne au voisinage de l'origine puis se dégrade lorsque l'on s'en éloigne : un déphasage de  $\pi/3$  entre solution numérique et continue apparaît à 10 longueurs d'onde de l'origine.

Cela est confirmé théoriquement. Un calcul simple montre que l'on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} s_h(x) = \frac{1+i}{\sqrt{x}} \exp i \varphi_h(0) \left( x + \frac{h}{4} \right)$$

avec :

$$\varphi_h(0) \sim \omega \left( 1 + \frac{\omega^2 h^2}{24} \right) \quad (h \rightarrow 0)$$

d'où un déphasage asymptotique de :

$$\delta\varphi \sim \pi \left[ \frac{H}{2} + \frac{4\pi^2 H^2 2\pi F_x}{24} \right] \sim \pi \left[ \frac{1}{20} + \frac{1}{3} \right] \quad \text{si } F_x = 10$$

On remarquera que le terme en  $h$  est négligeable, à dix longueurs d'ondes de l'origine, devant le terme en  $h^2$  !

Pour cinq points par longueur d'onde, la comparaison entre continu et numérique est difficile à effectuer à la seule vue du résultat (problème de représentation d'une fonction sous-échantillonnée). On notera toutefois la spectaculaire dégradation de l'approximation au voisinage de l'origine.

- La fonction  $\delta_h^+(x = ph)$

C'est la fonction qui va moduler la précédente pour donner sa particularité à chaque schéma ( $S_\lambda$ ).  $\delta_h^+$  est dépendante de  $\lambda$ .

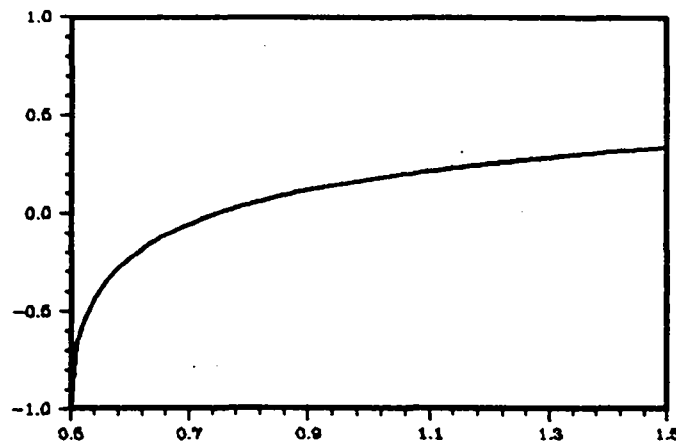
Dans cette étude, nous nous sommes intéressés au cas où  $\omega h$  est petit. Si l'on réécrit la formule de la proposition (2.5) sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_h^+(ph) = \frac{A_h}{h} (\xi_h)^p \frac{\Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(p+1)} \\ \xi_h = \exp i h \varphi_h \left(\frac{\pi}{h}\right) \end{array} \right.$$

et si l'on utilise l'équivalence (cf. Annexe A.c) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \lim_{h \rightarrow 0} \xi_h = \xi(\lambda) & \text{avec} \\ \text{si } \frac{1}{2} < \lambda < \frac{3}{4} & \xi(\lambda) \in ]-1,0[ \\ \text{si } \frac{3}{4} < \lambda & \xi(\lambda) \in ]0,1[ \end{array} \right.$$

$\xi(\lambda)$



On voit que la fonction  $\delta_h^+$  est une fonction très concentrée au point  $ph = 0$  et exponentiellement décroissante.

L'ensemble des schémas se subdivise en deux parties :

si  $\frac{1}{2} < \lambda < \frac{3}{4}$  on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_h^+(ph) \sim \frac{A}{h} |\xi|^p (-1)^p \frac{\Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(p+1)} \quad |\xi| < 1 \\ h \sum_{p=0}^{+\infty} \delta_h^+(ph) \sim 1 \end{array} \right.$$

si  $\frac{3}{4} < \lambda$  On a :

$$\begin{cases} \delta_h^+(\text{ph}) \sim \frac{A}{h} |\xi|^p \frac{\Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(p+1)} & |\xi| < 1 \\ h \sum_{p=0}^{+\infty} \delta_h^+(\text{ph}) \sim 1 \end{cases}$$

où l'on a noté :

$$A = \lim_{h \rightarrow 0} A_h = (1 - \xi)^{-1/2}$$

$\delta_h^+$  est donc bien pour  $\omega h$  petit, une approximation de l'unité.

• La fonction  $S_h^+(\text{ph})$

Rappelons que cette fonction s'obtient par convolution discrète des deux précédentes.

Nous avons représenté sur la planche suivante le graphe de ces fonctions pour 10 points par longueur d'onde et pour trois schémas :

$$\left| \begin{array}{ll} P_1 & (\lambda = 1) \\ Q_1 & (\lambda = 2/3) \\ \text{Arakawa} & (\lambda = 5/6) \end{array} \right.$$

On ne distingue aucune différence notable avec le graphe de la fonction  $s_h^+$  ; la convolution par  $\delta_h^+$  n'apporte aucune modification importante.

Il n'en est pas de même pour le schéma limite  $\left(\lambda = \frac{1}{2}\right)$  pour lequel la fonction  $\delta_h^+$  apparaît très oscillante  $\left(\xi\left(\lambda = \frac{1}{2}\right) = -1\right)$ . L'approximation de  $S_h^+$  par son équivalent continu est alors très mauvaise.

- La fonction  $\gamma_h^+(k_x^h)$

La fonction  $\gamma_h^+$  est obtenue lors de la décomposition multiplicative de Wiener Hopf. Elle est un équivalent discret de la fonction :

$$\gamma^+(k) = (k - \omega)^{1/2} = -i(\omega - k)^{1/2}$$

qu'elle approche à l'ordre 1 (cf. Annexe A.c).

Le nombre d'onde en  $x$ ,  $k_x^h$  est lié à la relation de dispersion. Nous en avons longuement parlé lors de la présentation de l'onde plane numérique. Ici, nous nous contenterons de rappeler l'équivalence :

$$\begin{cases} k_x^h = \omega_h(\theta) \cos \theta \\ \omega_h(\theta) = \omega(1 + O(h^2)) \end{cases}$$

On a donc :

$$\gamma_h^+(k_x^h) \sim \gamma^+(\omega \cos \theta) = -i \sqrt{\omega} \left| \sin \frac{\theta}{2} \right|$$

$\gamma^+(k_x)$  est donc toujours imaginaire pur.

Nous avons représenté les parties réelles et imaginaires des fonctions  $\gamma_h^+(k_x^h)$  pour 5 et 10 points par longueurs et pour trois schémas numériques ( $\lambda = 2/3, 5/6, 1$ ).

On notera la lenteur de la convergence, particulièrement sensible au voisinage de  $\theta = 180$  degrés, de la fonction discrète vers son équivalent continu. Vis à vis de cet effet, le schéma  $P_1$  apparaît comme le meilleur tandis que le schéma  $Q_1$  est le plus mauvais.

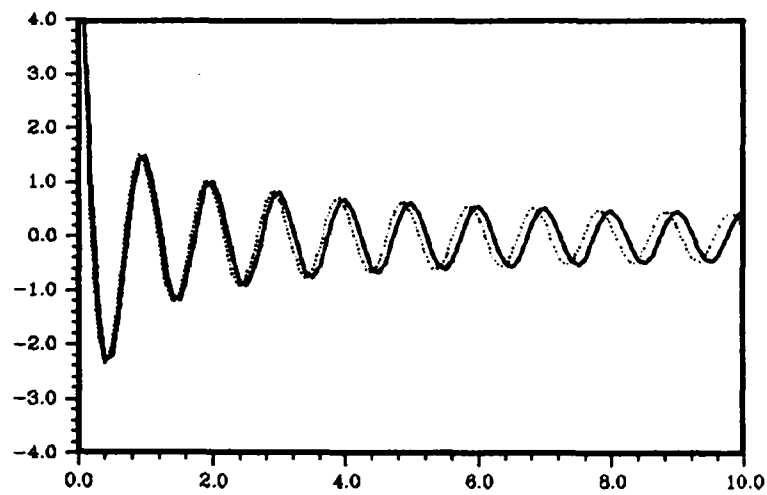
- La solution sur l'axe de la fissure

Nous avons représenté les variations de la solution numérique sur 10 longueurs d'onde de l'axe de la fissure. Le nombre de points par longueur d'onde est toujours choisi égal à 10 tandis que l'angle d'incidence prend les

deux valeurs 30 et 120 degrés.

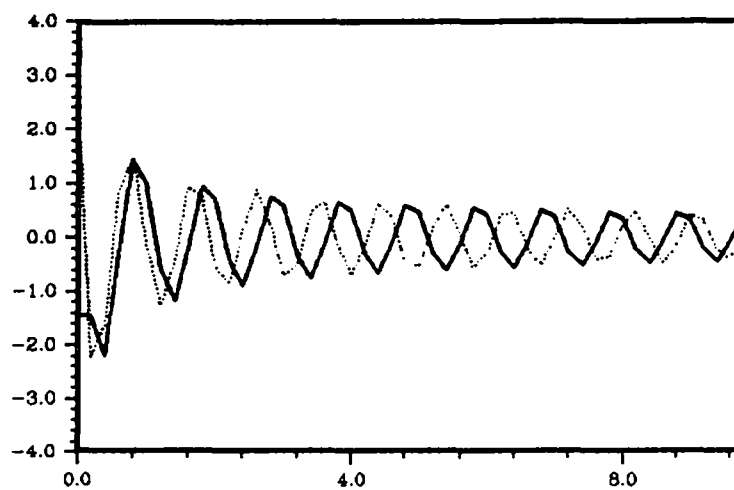
Pour les schémas les plus classiques ( $P_1$ ,  $Q_1$  et Arakawa), les résultats apparaissent tous équivalents ; si l'amplitude de la solution est très convenablement restituée, la phase de la solution numérique se dégrade au fur et à mesure que l'on s'éloigne de la pointe de la fissure. Ce phénomène, lié à la dispersion des schémas numériques, n'est pas véritablement spécifique à la présence de la fissure.

## *Partie réelle de la fonction $s^h$*



LEGENDE	
—	CONTINU
....	H : 0.1

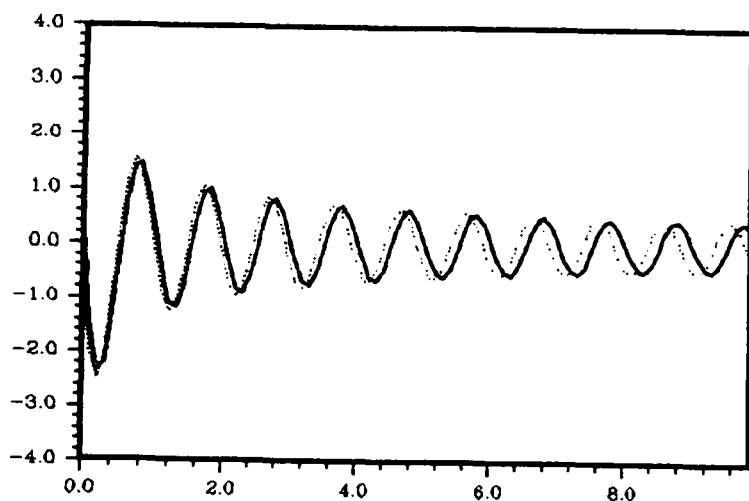
## *Partie réelle de la fonction $s^h$*



LEGENDE	
—	CONTINU
....	H : 0.2

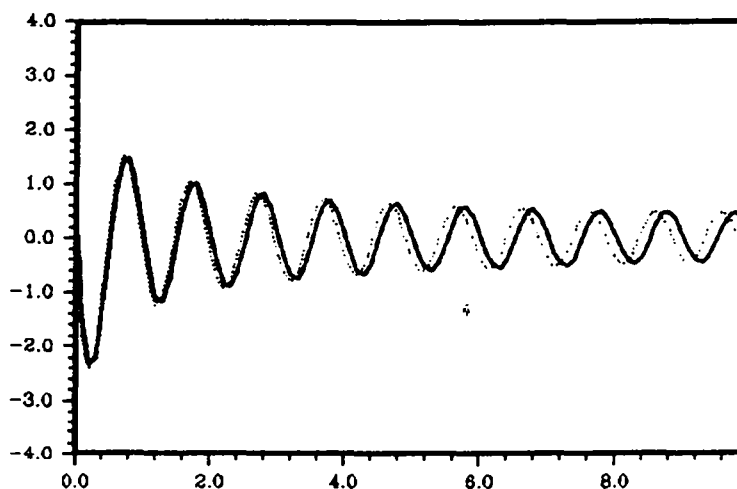
# Partie réelle de $s^\lambda * \delta^\lambda$

LEGENDE	
—	CONTINU
.....	H : 0.1



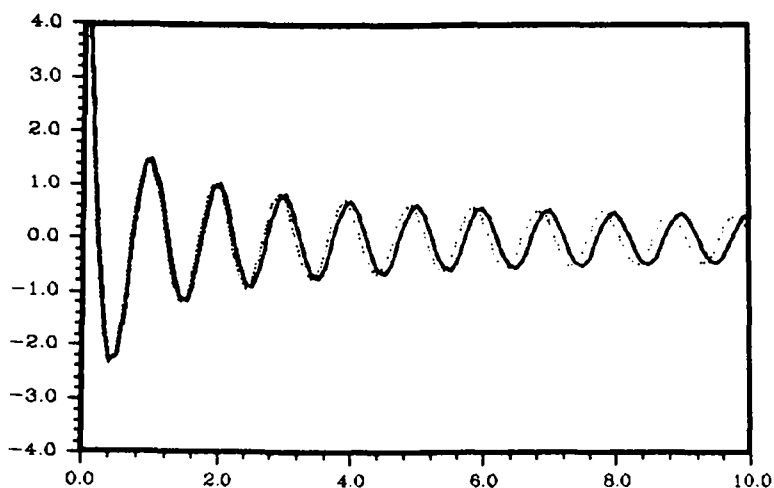
SCHEMA  $\lambda : 2/3$

# Partie réelle de $s^\lambda * \delta^\lambda$



SCHEMA  $\lambda : 5/6$

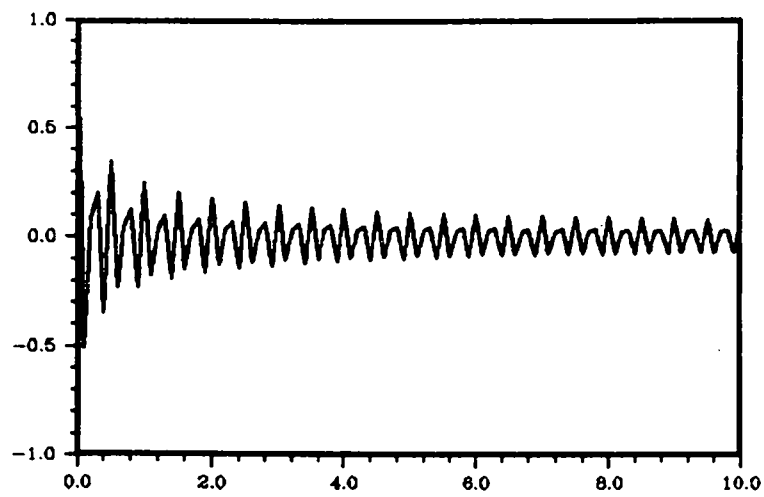
# Partie réelle de $s^\lambda * \delta^\lambda$



SCHEMA  $\lambda : 1$



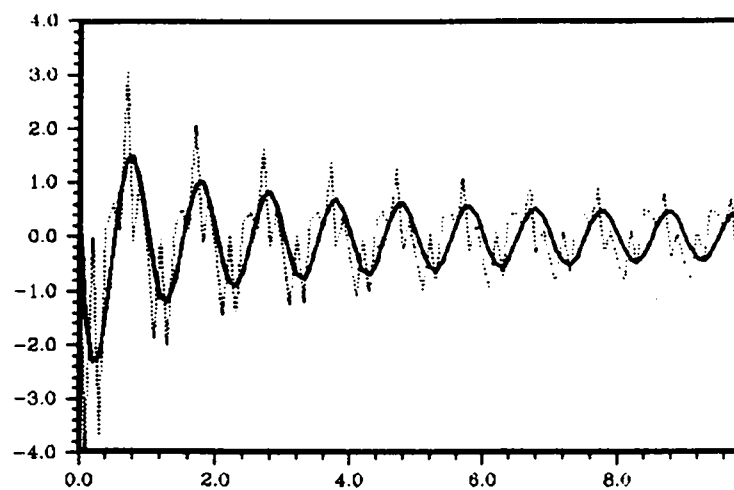
## La fonction $h.\delta^\lambda$



SCHEMA  $\lambda : 1/2$

LEGENDE	
—	H : 0.1

## Partie réelle de $s^\lambda * \delta^\lambda$



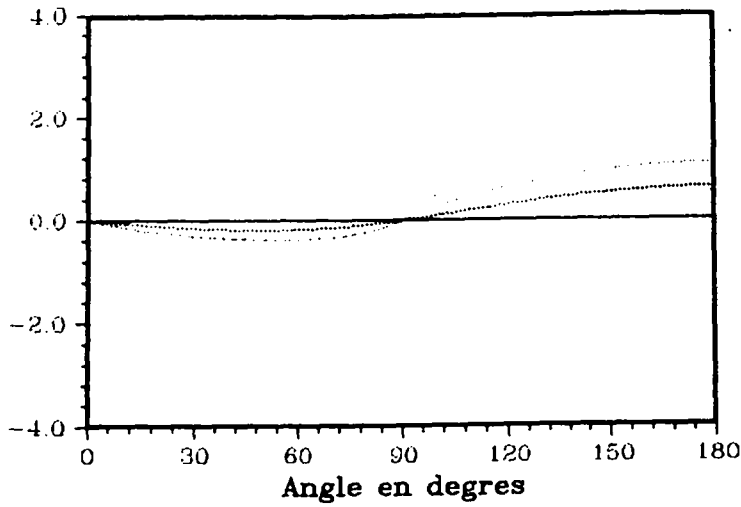
SCHEMA  $\lambda : 1/2$

LEGENDE	
—	CONTINU
.....	H : 0.1

$$\text{Reelle} \{ \gamma_h^+ (k_z^\lambda) \}$$

$$k_z^\lambda = \omega_h(\theta) \cos(\theta)$$

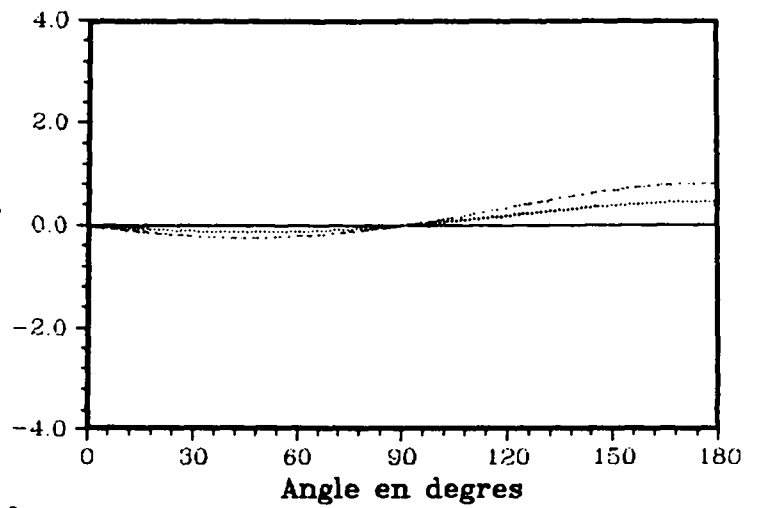
Legende	
—	Continu
....	H : 0.1
--	H : 0.2



SCHEMA  $\lambda : 2/3$

$$\text{Reelle} \{ \gamma_h^+ (k_z^\lambda) \}$$

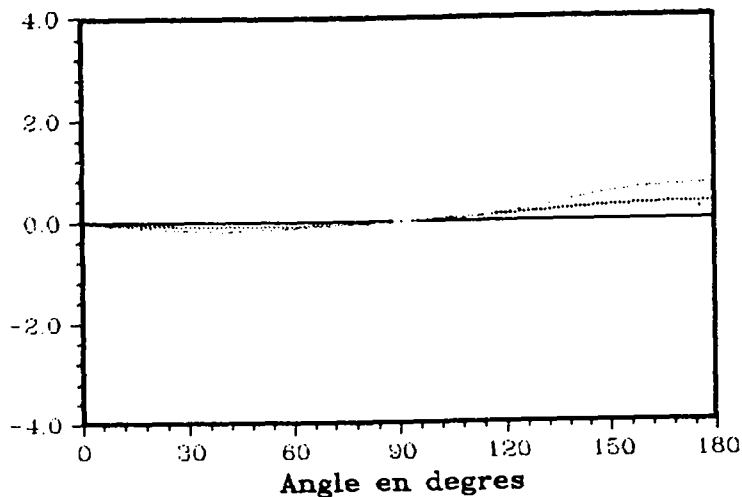
$$k_z^\lambda = \omega_h(\theta) \cos(\theta)$$



SCHEMA  $\lambda : 5/6$

$$\text{Reelle} \{ \gamma_h^+ (k_z^\lambda) \}$$

$$k_z^\lambda = \omega_h(\theta) \cos(\theta)$$

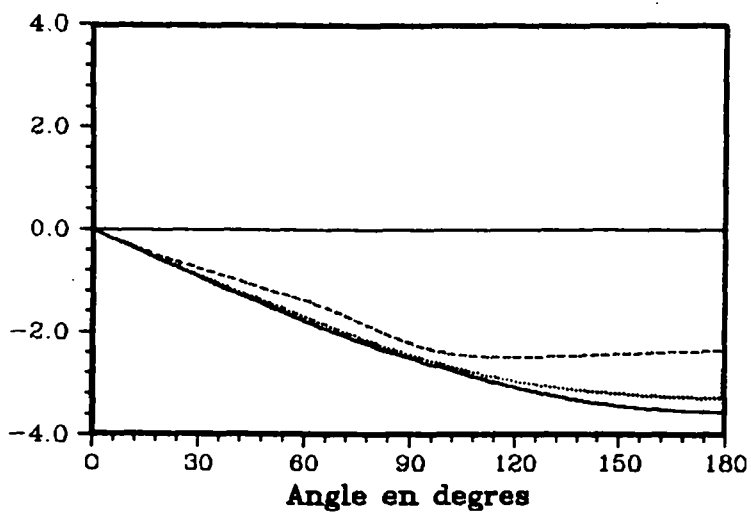


SCHEMA  $\lambda : 1$

$$\text{Im}\{ \gamma_h^+ (k_z^\lambda) \}$$

$$k_z^\lambda = \omega_h(\theta)\cos(\theta)$$

Legende	
—	Continu
.....	H : 0.1
--	H : 0.2

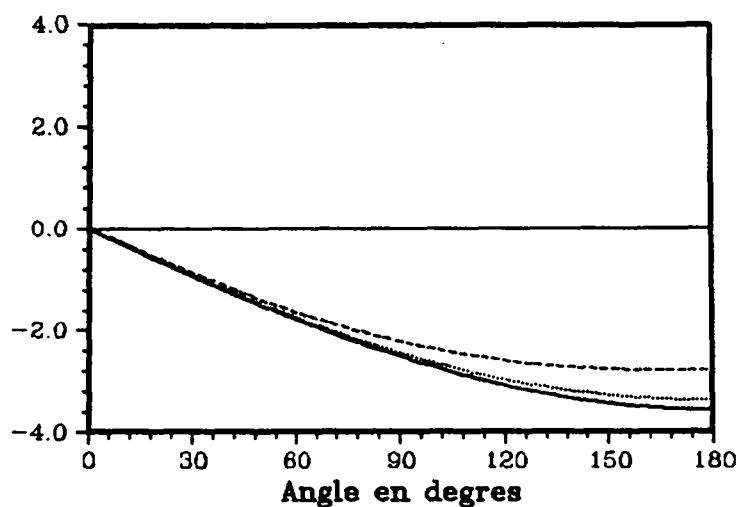


*SCHEMA*  $\lambda : 2/3$

$$\text{Im}\{ \gamma_h^+ (k_z^\lambda) \}$$

$$k_z^\lambda = \omega_h(\theta)\cos(\theta)$$

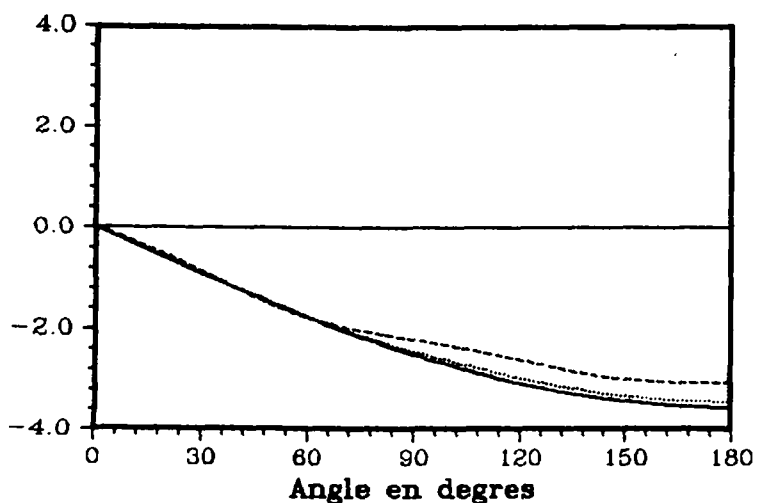
*SCHEMA*  $\lambda : 5/6$



$$\text{Im}\{ \gamma_h^+ (k_z^\lambda) \}$$

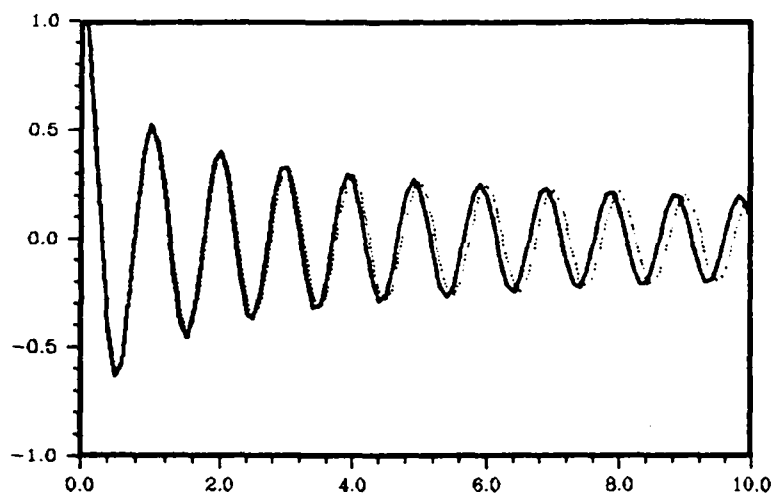
$$k_z^\lambda = \omega_h(\theta)\cos(\theta)$$

*SCHEMA*  $\lambda : 1$



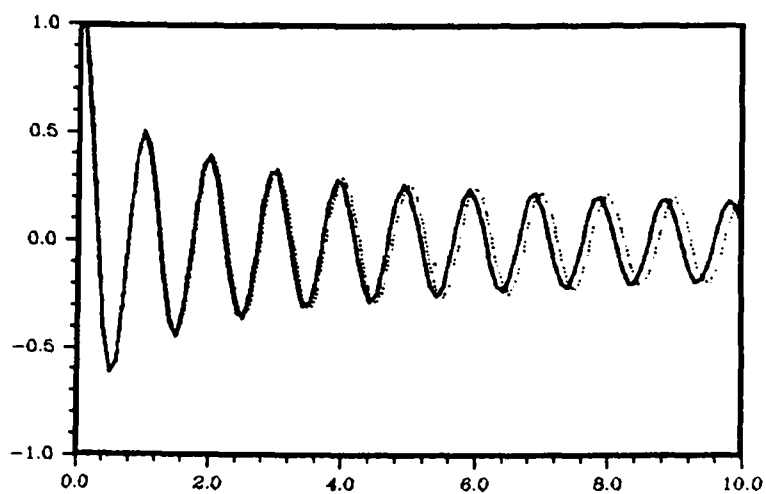
# PARTIE REELLE DU CHAMP TOTAL

LEGENDE	
—	H : 0.1
.....	CONTINU



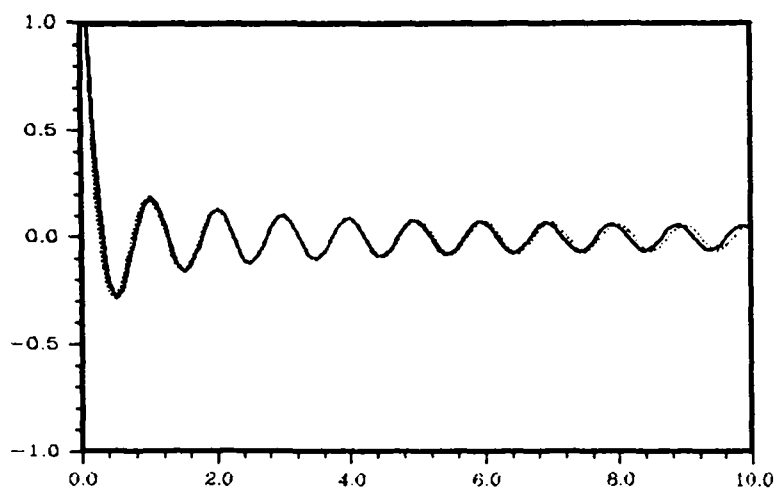
**SCHEMA  $\lambda : 2/3$**

**Axe de la fissure**  
**ANGLE D INCIDENCE  $\theta_i : 30$  DEGRES**



**SCHEMA  $\lambda : 1$**

**Axe de la fissure**  
**ANGLE D INCIDENCE  $\theta_i : 30$  DEGRES**



**SCHEMA  $\lambda : 1$**

**Axe de la fissure**  
**ANGLE D INCIDENCE  $\theta_i : 120$  DEGRES**

**CHAPITRE 3**  
**DECOMPOSITION DE LA SOLUTION - COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE**  
**DE L'ONDE DIFFRACTEE - APPLICATION A LA COMPARAISON**  
**DES SCHEMAS NUMERIQUES ( $S_\lambda$ )**

Dans ce dernier chapitre nous exploitons les résultats théoriques obtenus au chapitre 2 pour analyser les propriétés des schémas ( $S_\lambda$ ) vis à vis de l'approximation du phénomène de diffraction. Dans ce but, nous cherchons à tirer une information facilement interprétable de la formule générale (2.139) en étudiant le comportement asymptotique de la solution loin de la pointe de la fissure (champ lointain). La première phase des calculs consiste à décomposer le champ total comme la somme d'un champ géométrique et d'un champ diffracté (section 3.1). Le champ géométrique est entièrement décrit de manière analytique. Nous en déduisons des lois d'optique géométrique numérique et mettons en évidence l'existence d'une zone d'ombre numérique. Au paragraphe 3.2, nous étudions le comportement asymptotique de l'onde diffractée en champ lointain<sup>(\*)</sup>. Nous donnons la forme générale du résultat comme la somme d'ondes harmoniques divergentes «quasi-circulaires» dont l'amplitude décroît comme  $\frac{1}{\sqrt{r}}$ , si  $r$  désigne la distance à la pointe de la fissure. La forme asymptotique

du front d'onde est fonction du nombre de points par longueur d'onde. La variation angulaire de l'amplitude de l'onde le long de ce front dépend également du nombre de points par longueur d'onde mais aussi de la direction de propagation de l'onde plane incidente. Signalons que, si plusieurs ondes peuvent coexister dans le comportement asymptotique lorsque la discrétisation spatiale est insuffisamment fine, il ne reste qu'une seule onde «quasi-circulaire» divergente dès que le pas  $h$  du maillage est suffisamment petit devant la longueur d'onde. Les sous-chapitres 3.3 et 3.4 sont consacrés à la description plus précise des résultats généraux énoncés aux paragraphes 3.1 et 3.2 pour chacun des schémas  $S_\lambda$ , et à une analyse fine des résultats de convergence correspondant aux notions de zone d'ombre, de fronts d'onde asymptotique et d'amplitude asymptotique. La section 3.3 est consacrée à l'étude du champ géométrique. Nous comparons notamment, suivant les schémas et la direction de propagation de l'onde incidente, les zones d'ombre exactes et numériques. La section 3.4 est consacrée à l'étude du champ diffracté. Nous étudions dans une première étape les points de phase stationnaire et montrons comment ces points sont reliés à la géométrie des courbes de lentéur des schémas, courbes dont nous analysons les propriétés. Nous étudions en particulier le nombre de points de phase stationnaire, qui détermine le nombre d'ondes asymptotiques, en fonction du schéma, du paramètre  $\omega h$  et de la direction d'observation. Nous déduisons de cette étude préliminaire l'allure

(\*)La technique d'analyse fait appel, de façon classique, aux méthodes de phase stationnaire.

des fronts d'onde asymptotiques. On retrouve les résultats déjà obtenus dans [Ba], où ces fronts sont caractérisés comme les courbes polaires réciproques des courbes de lenteur. On notera que cette première partie de l'étude ne concerne que le schéma intérieur et est complètement indépendante de la direction de propagation de l'onde incidente et du schéma sur la fissure. Ces paramètres n'interviennent qu'au niveau de la deuxième partie, à savoir l'étude de l'amplitude de l'onde diffractée le long du front. Nous comparons à ce niveau les résultats exacts et approchés par l'intermédiaire des diagrammes d'amplitude adimensionnels.

### 3.1. DECOMPOSITION DE LA SOLUTION APPROCHÉE

Comme annoncé dans l'introduction de ce chapitre, nous allons nous attacher à démontrer l'existence d'une décomposition du champ total  $u_T^h$  sous la forme :

$$u_T^h = u_G^h + u_*^h$$

où  $u_G^h$  et  $u_*^h$ , champs géométrique et diffracté, vont essentiellement se distinguer par leurs comportements asymptotiques à l'infini. L'idée de la décomposition vient du fait que l'analyse du comportement asymptotique quand  $r$  tend vers l'infini,  $r$  désignant la distance à la pointe de la fissure, fait apparaître une partie principale d'amplitude constante (c'est ce qui définira le champ géométrique) et un terme secondaire dont l'amplitude décroît comme  $\frac{1}{\sqrt{r}}$ .

Plus précisément, nous considérons un point de coordonnées :

$$\begin{cases} x_p = ph \\ y_q = qh \end{cases}$$

Nous définissons :

- La distance du point  $(x_p, y_q)$  à la pointe de la fissure :

$$r = \sqrt{p^2 + q^2} h$$

- L'angle d'observation  $\Theta$  :

$$\text{tg } \Theta = \frac{ph}{qh}$$

et nous nous intéressons à la quantité :

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} u_T^h(x_p, y_q) = \lim_{r \rightarrow +\infty} u_T^h(r, \Theta)$$

$u_T^h$  est le champ numérique total, somme du champ incident  $u_I^h$  et du champ diffracté  $u_D^h$ . Les paragraphes précédents ont établi que le champ total est donné par la formule :

$$(3.1) \quad u_T^h(x_p, y_q) = \exp i (k_x^h x_p + k_y^h y_q) - \frac{\text{signe}(y)}{2i\pi} \int_{\Gamma_\Theta^h} F_h(k) \exp i r \phi_h(k, \Theta) dk$$

où nous avons défini :

– la phase  $\phi_h(k, \Theta)$

$$(3.2) \quad \phi_h(k, \Theta) = \cos \Theta k + |\sin \Theta| \varphi_h(k)$$

– la fonction  $F_h(k)$  :

$$(3.3) \quad F_h(k) = \frac{-ih \gamma_h^+(k_x^h)}{\gamma_h^+(k) (1 - \exp ih (k - k_x))}$$

$\gamma_h^+$  défini en (2.115),  $\varphi_h$  en (2.122)



Ainsi, le problème se ramène à l'étude du comportement asymptotique d'une intégrale oscillante le long d'un contour du plan complexe.

L'idée de base pour traiter la difficulté du problème repose sur le principe suivant :

Si le contour  $\Gamma_\theta^h$  peut être déformé en un contour très régulier et sur lequel la fonction :

$$k \rightarrow \exp i \phi_h(k, \Theta)$$

est de module inférieur ou égal à 1, il est possible d'utiliser un théorème de la phase stationnaire pour obtenir le comportement asymptotique.

La condition sur le module est en effet nécessaire : si elle n'est pas vérifiée, la fonction :

$$r \rightarrow \exp i r \phi_h(k, \Theta)$$

explose lorsque  $r$  tend vers l'infini !

Bien sûr, nous pouvons utiliser les propriétés d'analyticité de la fonction intégrande, que nous avons établies dans la section (2.4), pour, éventuellement, déformer le contour  $\Gamma_\theta^h$  de façon à se placer dans le bon cas, soit :

$$|\exp i \phi_h(k, \theta)| \leq 1 \quad \text{sur } \ll \Gamma_\theta^h \text{ déformé} \gg$$

ou, de manière équivalente :

$$\text{Im } \phi_h(k, \Theta) \geq 0 \quad \text{sur } \ll \Gamma_\theta^h \text{ déformé} \gg$$

Rappelons que  $\Gamma_\theta^h$  est confondu avec le segment  $\left[ -\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h} \right]$  sauf au voisinage de certains points singuliers. (cf. Figures du paragraphe 2.4.a).

Notons que tous les points qui sont situés sur ce segment ont la partie imaginaire de leur phase positive. En effet, pour ces points d'abscisse réel, on a :

$$\operatorname{Im} \phi_h(k, \Theta) = |\sin \Theta| \operatorname{Im} \phi_h(k) \quad (k \in \mathbb{R})$$

quantité qui est bien positive ou nulle, d'après la définition de  $\phi_h(k)$  :

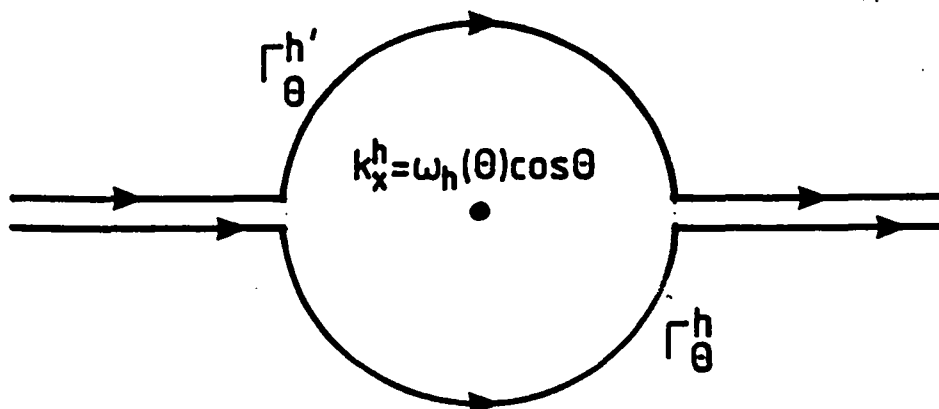
$$\begin{cases} \phi_h(k) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \phi_{\varepsilon, h}(k) \\ \operatorname{Im} \phi_{\varepsilon, h}(k) > 0 \end{cases}$$

En première conclusion, seuls posent problèmes les points du contour situés hors du segment  $\left[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right]$ , à savoir :

- les points du demi-cercle situés dans le demi-plan inférieur  $\operatorname{Im}(z) < 0$ , et contournant le point  $k_x^h$  pôle de la fonction  $F_h$
- Les points des demi-cercles contournant :
  - le/les point(s)  $\phi_h(0)$  ou/et  $\phi_h\left(\frac{\pi}{h}\right)$ , dans le demi plan inférieur  $\operatorname{Im}(z) < 0$ ,
  - le/les point(s)  $-\phi_h(0)$  ou/et  $-\phi_h\left(\frac{\pi}{h}\right)$ , dans le demi-plan supérieur  $\operatorname{Im}(z) > 0$ .

Remarquons que ces deux types de contournement n'ont pas du tout le même objet. Le premier cherche à éviter un pôle de la fonction intégrande tandis que le second vise à contourner les branches de cette même fonction.

Ainsi, le contournement du pôle  $k_x^h$  par le bas n'est pas vraiment obligatoire. Si l'on substitue au contour  $\Gamma_\theta^h$  le contour  $\Gamma_\theta^{h'}$  différant du premier de par son contournement par le haut du point  $k_x^h$ :



le théorème de Cauchy nous donne :

$$u_T^h(x_p, y_q) = \exp i (k_x^h x_p + k_y^h y_q) - \text{signe}(y_q) \text{Res} (F_h(k) \exp i r \phi_h(k, \Theta), k = k_x^h) \\ - \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_\Theta^h} F_h(k) \exp i r \phi_h(k, \Theta) dk$$

Utilisons la relation :

$$\text{Res} (F_h(k) \exp i r \phi_h(k, \Theta), k = k_x^h) \\ = \exp i r \phi_h(k_x^h, \Theta) = \exp i (k_x^h x_p + k_y^h |y_q|) \\ = \begin{cases} u_I^h(x_p, y_q) & \text{si } y_q > 0 \\ u_R^h(x_p, y_q) & \text{si } y_q < 0 \end{cases}$$

On obtient ainsi une alternative à la formule (3.1). On peut donc écrire, indifféremment :

Si  $y_q > 0$

$$u_T^h(x_p, y_q) = u_I^h(x_p, y_q) - \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_\Theta^h} F_h(k) \exp i r \phi_h(k, \Theta) dk$$

ou bien

$$u_T^h(x_p, y_q) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_\Theta^h} F_h(k) \exp i r \phi_h(k, \Theta) dk$$

Si  $y_q < 0$

$$u_T^h(x_p, y_q) = u_I^h(x_p, y_q) + \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_\theta^h} F_h(k) \exp i r \phi_h(k, \Theta) dk$$

ou bien

$$\begin{aligned} u_T^h(x_p, y_q) &= u_I^h(x_p, y_q) + u_R^h(x_p, y_q) \\ &+ \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_\theta^h} F_h(k) \exp i r \phi_h(k, \Theta) dk \end{aligned}$$

La formule que nous devons retenir, pour étudier le comportement asymptotique, est déterminée dans la proposition suivante :

Proposition 3.1 :

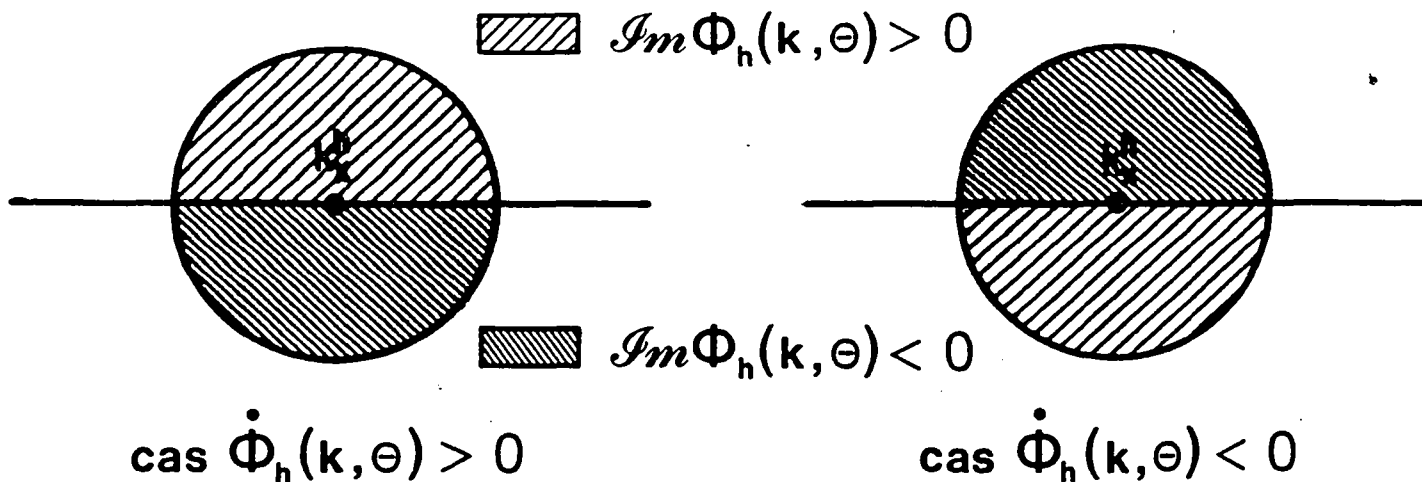
Supposons  $\phi_h(k_x^h, \Theta) \neq 0$

il existe alors un voisinage  $V_\Theta$  de  $k_x^h$  tel que si  $z$  est un point de ce voisinage on ait :

$\text{Im} z > 0 \Rightarrow \text{Im} \phi_h(k, \Theta)$  est du signe de  $\phi_h(k_x^h, \Theta)$

$\text{Im} z < 0 \Rightarrow \text{Im} \phi_h(k, \Theta)$  est du signe opposé à celui de  $\phi_h(k_x^h, \Theta)$

Dite d'une autre manière, cette proposition signifie que l'axe réel partage le voisinage  $V_\Theta$  en deux parties sur lesquelles le signe de la partie imaginaire de la phase est constant.



Preuve :

Ecrivons le développement de Taylor :

$$\phi_h(k_x^h + \alpha + i\varepsilon) = \phi_h(k_x^h) + (\alpha + i\varepsilon) \phi_h'(k_x^h) + O(\alpha^2 + \varepsilon^2)$$

un calcul simple montre que, puisque  $(k_x^h, \phi_h(k_x^h))$  est réel, il en est de même pour  $\phi_h(k_x^h)$  et, par conséquent pour  $\phi_h'(k_x^h)$  ; on a donc :

$$\text{Im } \phi_h(k_x^h + \alpha + i\varepsilon) = \varepsilon \cdot \phi_h'(k_x^h) + O(\alpha^2 + \varepsilon^2)$$

d'où l'énoncé de la proposition.

Remarque

Supposons que l'angle d'observation  $\Theta$  soit tel que :

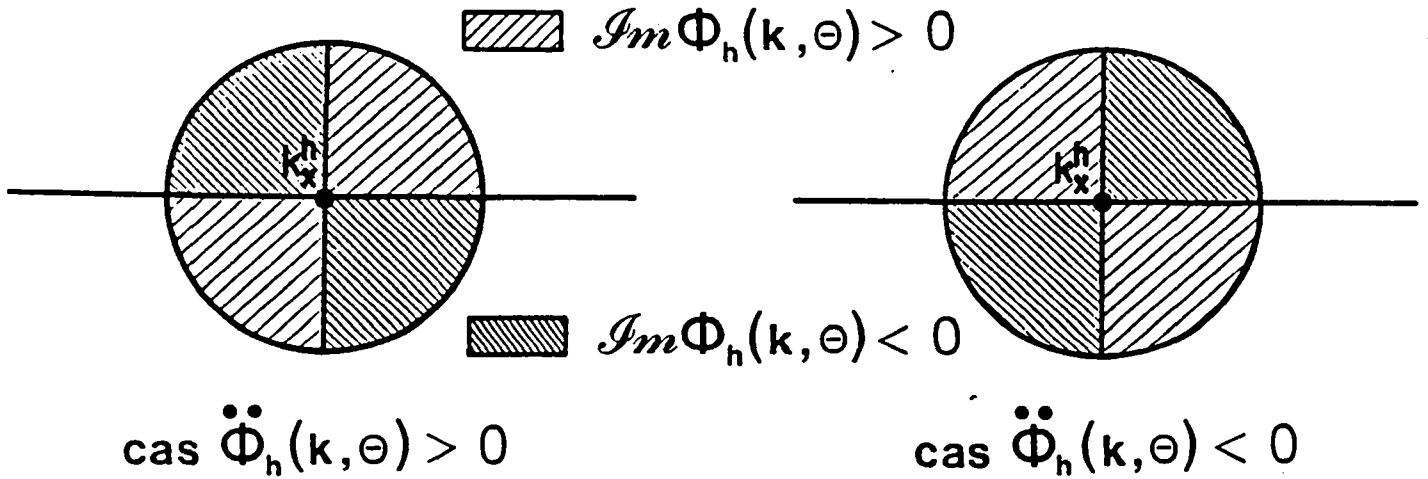
$$\phi_h(k_x^h, \Theta) = 0$$

ou encore :

$$\phi_h(k_x^h) = - \frac{\cos \Theta}{|\sin \Theta|}$$

on dit alors que la phase stationne, ou est stationnaire, en  $k_x^h$

La proposition précédente ne s'applique plus et on doit reprendre la démonstration en considérant le développement de Taylor à l'ordre 2. On montre que le voisinage  $V_\Theta$  est, dans ce cas, divisé en quatre parties comme le montre le petit schéma suivant :



On voit ainsi qu'il est impossible de contourner le pôle  $k_x^h$  sans rencontrer des points de phase de partie imaginaire négative ! : le comportement asymptotique ne peut pas s'obtenir dans ce cas avec les techniques que nous exposons ici.

Quoi qu'il en soit, nous avons tous les éléments pour déterminer le choix du contournement pour presque toutes les directions et, par là-même, de faire apparaître le champ géométrique discret.

Nous définissons :

$-\Phi_h(\theta)$  l'angle pour lequel la phase stationnaire en  $k_x^h = \omega_h(\theta) \cos \theta$  et qui est donc défini par :

$$\varphi_h(k_x^h) = - \frac{\cos \Theta}{|\sin \Theta|}$$

$\Theta_h^*(\theta)$  peut s'interpréter comme l'angle que fait la normale, à la courbe de lenteur au point  $OM(\theta) = \omega_h(\theta) \cdot \hat{\theta} = (k_x^h, \varphi_h(k_x^h))$ , avec l'axe  $k_x^h = 0$  (cf. 3.4.c).

Puis, nous caractérisons  $u_G^h$  par les relations :

$$u_G^h(r, \Theta) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq \Theta < \Theta_h^*(\theta) \\ u_I^h & \text{si } \Theta_h^*(\theta) < \Theta < 2\pi - \Theta_h^*(\theta) \\ u_I^h + u_R^h & \text{si } 2\pi - \Theta_h^*(\theta) < \Theta < 2\pi \end{cases}$$

L'étude que nous venons d'effectuer nous permet d'écrire :

$$u_T^h(r, \Theta) = u_G^h(r, \Theta) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} F_h(k) \exp i r \phi(k, \Theta) dk$$

avec :

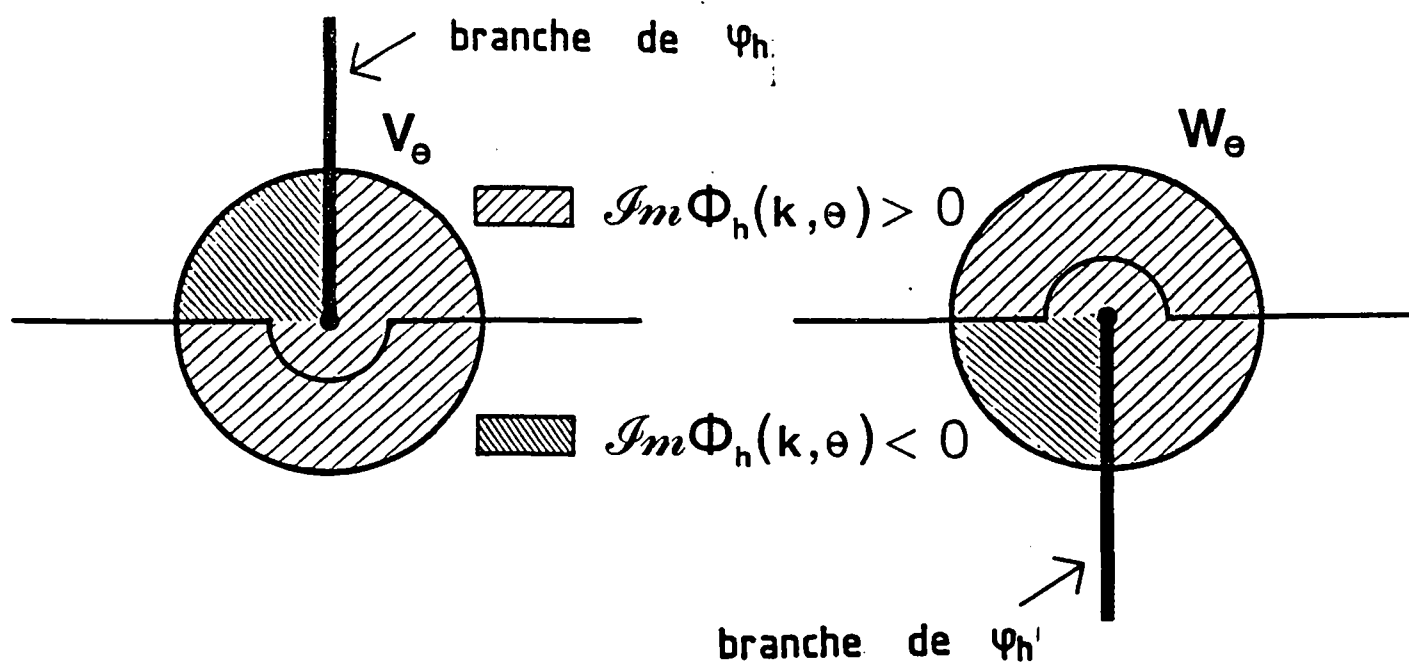
$$\Gamma = \begin{cases} \Gamma_{\theta}^h & \text{si } \Theta_h^*(\theta) < \Theta < 2\pi - \Theta_h^*(\theta) \\ \Gamma_{\theta}^{h'} & \text{sinon} \end{cases}$$

et d'affirmer que la partie imaginaire est du bon signe (positive) au moins pour les points de  $\Gamma$  situés sur le segment  $\left[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right]$  ou bien sur le demi-cercle contour-nant le pôle  $k_x^h$ .

Restent à étudier les points de  $\Gamma$  contournant les pointes des branches de la fonction intégrande.

La proposition suivante montre que si le contournement est effectué dans un voisinage suffisamment petit de ces pointes, la partie imaginaire de la phase a le bon goût de rester positive.

Schématiquement, on peut présenter la situation de la façon suivante :



Proposition 3.2 :

Posons  $\xi = 0$  ou  $\frac{\pi}{h}$  et supposons que  $\phi_h(\xi)$  soit élément de  $\left[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right]$ .

Alors, il existe un voisinage  $V_\theta$  de  $\phi_h(\xi)$  et un voisinage de  $W_\theta$  de  $-\phi_h(\xi)$  tel que :

$$\begin{cases} \text{si } z \in V_\theta \text{ et } \Im z < 0 \\ \text{alors} & \Im \phi_h(z, \Theta) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{si } z \in W_\theta \text{ et } \Im z > 0 \\ \text{alors} & \Im \phi_h(z, \Theta) > 0 \end{cases}$$

Démonstration :

Nous la ferons pour  $\xi = 0$  et pour l'énoncé relatif à  $V_\theta$ , les trois autres cas se traitant de manière analogue.

Nous partons de la formule (2.122) pour écrire :



$$\begin{cases} \exp i h \varphi_h(z) &= \cosh \varphi_h(z) + G(z) (1 - \exp i h (\varphi_h(o) - z))^{1/2} \\ \cos [h \varphi_h(\varphi_h(o))] &= 1 \\ \cos \varphi_h(z), G(z) &\text{analytiques au voisinage de } \varphi_h(o) \end{cases}$$

En développant les fonctions analytiques impliquées sous forme de séries entières, on aboutit au développement en série de Puiseux (cf. Knopp [Kn], page 130) :

$$\varphi_h(z) = 1 + \sum_{n \geq 1} a_n [i(z - \varphi_h(o))]^{\frac{n}{2}}$$

Ecrivons  $z$  sous la forme :

$$\begin{cases} z = \varphi_h(o) + \varepsilon \exp i \theta \\ \theta \in \left] -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \end{cases}$$

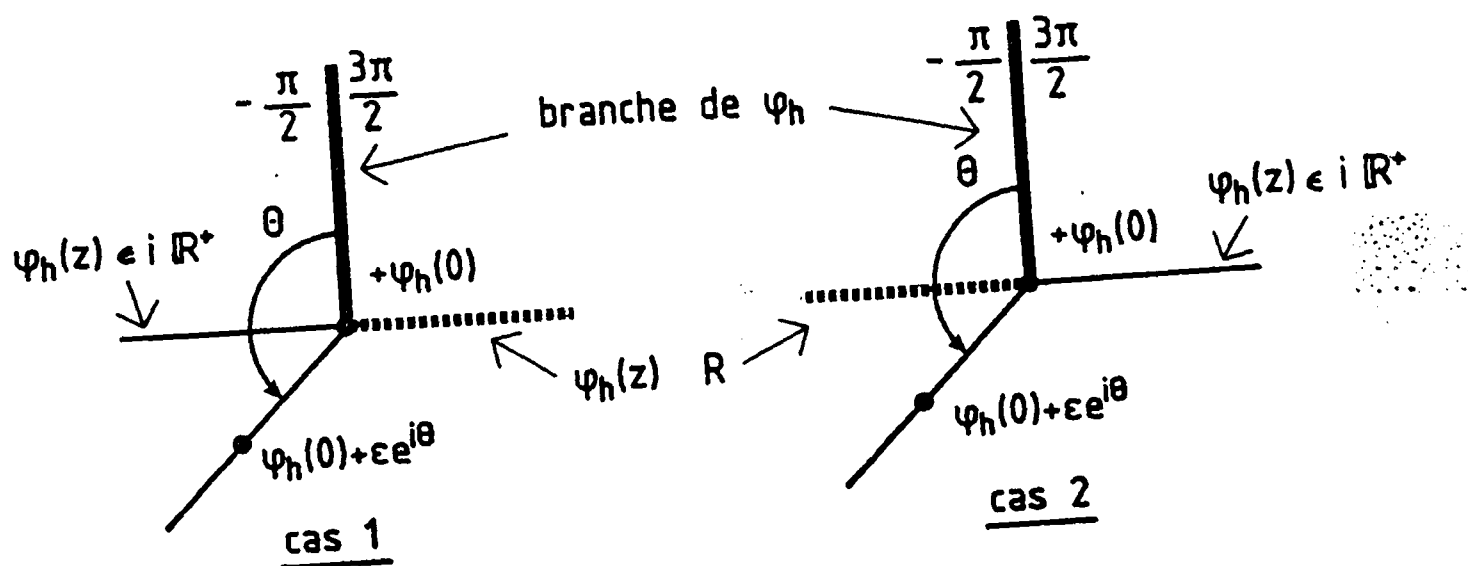
il vient :

$$\begin{cases} \operatorname{Im} \varphi_h(z) &= \rho_1 \sqrt{\varepsilon} \sin \left( \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} + \alpha_1 \right) (1 + \sqrt{\varepsilon} o(1)) \\ a_1 &= \rho_1 \exp i \alpha_1 \end{cases}$$

Le calcul de  $a_1$  est assez pénible, on peut l'éviter en remarquant que deux cas peuvent se présenter :

$$\text{cas 1 : } \begin{cases} \operatorname{Im} \varphi_h(z) = 0 & \text{pour } \theta = 0 \\ \operatorname{Im} \varphi_h(z) > 0 & \text{pour } \theta = -\pi \end{cases}$$

$$\text{cas 2 : } \begin{cases} \operatorname{Im} \varphi_h(z) = 0 & \text{pour } \theta = -\pi \\ \operatorname{Im} \varphi_h(z) > 0 & \text{pour } \theta = 0 \end{cases}$$



$\varphi_h(z)$  au voisinage de  $z = \varphi_h(o)$

On a donc :

$$\begin{cases} \operatorname{Im} \varphi_h(z) = \rho_1 \sqrt{\varepsilon} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) [1 + \sqrt{\varepsilon} o(1)] & (\text{cas 1}) \\ \operatorname{Im} \varphi_h(z) = -\rho_1 \sqrt{\varepsilon} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) [1 + \sqrt{\varepsilon} o(1)] & (\text{cas 2}) \end{cases}$$

D'autre part, comme  $\varphi_h(o)$  est réel par hypothèse, on a :

$$\operatorname{Im} \phi_h(z, \Theta) = \cos \Theta \cdot \varepsilon \sin \theta + |\sin \Theta| \operatorname{Im} \varphi_h(z)$$

soit :

$$\begin{cases} \operatorname{Im} \phi_h(z, \Theta) = \sqrt{\varepsilon} \rho_1 |\sin \Theta| \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) [1 + \sqrt{\varepsilon} o_1(1)] & (\text{cas 1}) \\ \operatorname{Im} \phi_h(z, \Theta) = -\sqrt{\varepsilon} \rho_1 |\sin \Theta| \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) [1 + \sqrt{\varepsilon} o_2(1)] & (\text{cas 2}) \end{cases}$$

$$\text{avec : } \begin{cases} o_1(1) = \frac{2 \cos \Theta}{|\sin \Theta|} \sin \frac{\theta}{2} + o(1) \\ o_2(1) = \frac{-2 \cos \Theta}{|\sin \Theta|} \cos \frac{\theta}{2} + o(1) \end{cases}$$

Choisissons  $\varepsilon_\Theta$  assez petit pour que  $(1 + o_j(1) \sqrt{\varepsilon})$ ,  $j = 1, 2$  reste positif dès que  $\varepsilon$  est inférieur à  $\varepsilon_\Theta$ .

Le signe de la partie imaginaire de  $\phi(z, \Theta)$  est alors déterminé par le signe de  $\cos \frac{\theta}{2}$  ou  $-\sin \frac{\theta}{2}$  sur la boule de centre  $\phi_h(o)$  et de rayon  $\varepsilon_\Theta$ .

Or on a :

$$\begin{cases} \cos \frac{\theta}{2} > 0 \\ -\sin \frac{\theta}{2} > 0 \end{cases} \quad \text{pour } \theta \in ]-\pi, 0[$$

La boule décrite précédemment est le voisinage recherché.

Remarque :

Cette démonstration ne marche pas si  $|\sin \Theta|$  est nulle. Ce n'est toutefois pas crucial puisque :

- pour  $\Theta = \pi$  : on sait que le champ total est confondu avec le champ incident.
- pour  $\Theta = 0$  ou  $2\pi$  : on est sur l'axe de la fissure où l'on connaît explicitement la solution (cf. section 2.5.3).

A ce stade de l'exposé, il ne nous reste plus qu'à «adoucir» les raccords entre les demi-cercles et le segment réel en déformant légèrement  $\Gamma$  pour remplir l'objectif que nous nous étions fixé : trouver un contour régulier sur lequel la phase est de partie imaginaire positive ou nulle.

Précisons ce que nous appelons régulier : nous supposons désormais que  $\Gamma$  est un chemin joignant  $-\frac{\pi}{h}$  à  $\frac{\pi}{h}$ , du type :

$$\Gamma = (\gamma, [0,1])$$

où  $\gamma$  est une application  $C^\infty$  de  $[0,1]$  à valeur dans le plan complexe avec «recollement  $C^\infty$  des extrémités» :

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma \in C^\infty([0,1], \mathbb{C}) \\ \gamma(0) = -\frac{\pi}{h}, \quad \gamma(1) = \frac{\pi}{h} \\ \frac{d^n \gamma(0)}{ds^n} = \frac{d^n \gamma(1)}{ds^n}, \quad \forall n > 0 \end{array} \right.$$

$\Gamma$  étant ainsi défini, nous présentons dans la proposition suivante, le résultat intermédiaire que nous venons d'obtenir :

Proposition 3.3 :

Le champ numérique total admet la décomposition suivante :

$$u_T^h = u_G^h + u_*^h$$

où  $u_G^h$  est le champ géométrique discret, précédemment défini, et où  $u_*^h$  est donné par la relation :

$$u_*^h = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} F_h(k) \exp i r \phi_h(k, \Theta) dk$$

Dans cette formule,  $\Gamma$  est un contour joignant le point  $-\frac{\pi}{h}$  à  $\frac{\pi}{h}$  et pour lequel les propriétés suivantes sont vérifiées :

i)  $\Gamma$  est «très régulier» ( $C^\infty$  par exemple avec recollement  $C^\infty$  des extrémités) ;

ii)  $k \rightarrow F_h(k) \exp i r \phi_h(k, \Theta)$  est analytique et  $\frac{2\pi}{h}$  périodique sur  $\Gamma$  ;

iii)  $|\exp i r \phi_h(k, \Theta)| \leq 1$  sur  $\Gamma$  ;

iv)  $k \in \Gamma$  et  $\text{Im } \phi_h(k, \Theta) = 0 \Rightarrow k \in \left[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right] \cap \Gamma$

Ces quatre propriétés vont nous être nécessaires pour utiliser un théorème de la phase stationnaire bien adapté à notre problème. Ce théorème permettra de montrer que le champ  $u^h_*$  décroît comme  $1/\sqrt{r}$  et apparaît donc comme une correction du champ géométrique.

Le champ géométrique et ses propriétés seront analysés dans la section 3.3.

### 3.2. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE LA PARTIE DIFFRACTÉE

Nous utilisons un théorème de la phase stationnaire pour étudier le comportement asymptotique de la partie «diffractée» de la solution numérique.

$$u^h_* = u^h_T - u^h_G = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} F_h(k) \exp i r \phi_h(k, \Theta) dk$$

Ce théorème montre que la contribution principale à l'intégrale sur  $\Gamma$  provient, lorsque  $r$  est grand, essentiellement du voisinage des points de phases réelles et stationnaires. Ces points sont les éléments de l'ensemble :

$$(3.4) \quad K_{\lambda}(\omega h, \Theta) = \left\{ k \in \left[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right] ; \phi_h(k_s, \Theta) = 0, \phi_h(k_s, \Theta) \in \mathbb{R} \right\}$$

Les points de  $K_{\lambda}(\omega h, \Theta)$  vérifient le système :

$$(3.5) \quad \begin{cases} \varphi_h(k) &= - \frac{\cos \Theta}{|\sin \Theta|} \\ \varphi_h(k_s) &\in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ce système est analysé en annexe : on montre que  $k_s$  est élément de  $K_\lambda(\omega h, \Theta)$  dès que  $\cos h k_s$  est solution d'un pôleynome de degré au plus égal à 4. Théoriquement, on ne peut donc avoir au plus que quatre points de phase réelle et stationnaire dans la direction  $\Theta$ . La détermination du nombre exact de points est difficile et doit être menée au cas par cas suivant les valeurs du triplet  $(\omega h, \lambda, \Theta)$ . Nous reviendrons plus en détail sur ce sujet dans le paragraphe 3.4.

Nous énonçons de façon précise le résultat central de ce paragraphe dans une proposition.

Proposition 3.4 :

Le champ  $u_*^h$ , différence du champ total et du champ géométrique discret admet le développement asymptotique suivant :

$$(3.6) \quad u_*^h(r, \Theta) = \sum_{k_s} A_h(k_s, \Theta) \frac{\exp i r \phi_h(k_s, \Theta)}{\sqrt{\omega r}} \left( 1 + o\left(\frac{1}{r}\right) \right)$$

où la sommation est étendue aux points de phases réelles et stationnaires :

$$k_s \in K_\lambda(\omega h, \Theta)$$

et où  $A_h(k_s, \Theta)$  est l'amplitude dont l'expression est donnée par la relation :

$$(3.7) \quad \begin{cases} A_h(k_s, \Theta) = i \sqrt{\frac{i \omega}{2\pi \varphi_h(k_s) |\sin \Theta|}} \frac{(-i h \gamma_h^+(k_x))}{\gamma_h^+(k_s) (1 - \exp i h (k_s - k_x))} \\ k_x = \omega_h(\theta) \cos \theta \end{cases}$$

### Démonstration :

On commence par utiliser la paramétrisation  $C^\infty \gamma$  du contour  $\Gamma$  pour se ramener à une intégrale ordinaire :

$$u_h^*(r, \Theta) = \int_0^1 S(s) \exp i r \psi(s) ds$$
$$S(s) = \frac{-\gamma'(s)}{2i\pi} F_h(\gamma(s)) \quad ; \quad \psi(s) = \phi_h(\gamma(s), \Theta)$$

Afin d'utiliser les propriétés locales des fonctions impliquées, on va découper l'intégrale en une somme finie d'intégrales.

On recouvre l'intervalle  $[0,1]$  par des intervalles de longueur inférieure à  $\varepsilon$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} [0,1] \quad I_0 \cup I_1 \cup \dots \cup I_{N_\varepsilon} \\ 0 \in I_0, \quad 1 \in I_{N_\varepsilon} \end{array} \right.$$

Puis on se donne une partition de l'unité  $C^\infty$  subordonnée au recouvrement : soient  $\alpha_1, \dots, \alpha_{N_\varepsilon}$  telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Support } \alpha_i \subset I_i \\ \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \alpha_i = 1 \quad \text{sur } [0,1] \end{array} \right.$$

On a alors :

$$u_h^*(r, \Theta) = \sum_{i=2}^{N_\varepsilon-1} \int_{I_i} \alpha_i(s) S(s) \exp i r \psi(s) ds + \int (\alpha_1 + \alpha_{N_\varepsilon})(s) S(s) \exp i r \psi(s) ds$$

On a recollé de manière  $C^\infty$  les extrémités. Ainsi et en utilisant la périodicité des fonctions, la dernière intégrale pourra se traiter de la même façon que les premières.

On va, à présent, présenter 3 cas où l'on sait utiliser des techniques classiques afin d'obtenir des résultats sur le développement asymptotique.

1er cas : On suppose  $|\exp i r \psi(s)| < 1$  sur  $I_i$

Dans ce cas, on a aucun besoin de la phase  $\psi(s)$  ; on travaille directement sur l'exponentielle. On a :

$$\begin{cases} |\exp i r \psi(s)| = |\exp i h \phi_h(\gamma(s))|^q = |r(s)|^q \\ q = r h^{-1} |\sin \Theta| \end{cases}$$

et donc, en majorant brutalement, il vient :

$$\left| \int_{I_i} \alpha_i(s) S(s) \exp i r \psi(s) ds \right| \leq M_i A_i^r$$

avec :

$$M_i = \sup_{I_i} |\alpha_i(s) S(s)|$$

$$A_i = |\sup(r(s))|^{\frac{|\sin \Theta|}{h}} < 1$$

on a donc un comportement exponentiellement décroissant (au beurre).

2ème cas : On suppose  $|\exp i r \psi(s)| \leq 1$  et  $\psi(s)$  non nul sur  $I_i$

On procède alors par intégration par parties. On montre par un procédé de récurrence sur  $n$  que :



$$\text{si } F_0(s) = \alpha_1(s) S(s), F_n(s) = \frac{d}{ds} \left[ \frac{F_{n-1}(s)}{\psi'(s)} \right]$$

alors :

$$\int_{I_1} \alpha_1(s) S(s) \exp i r \psi(s) ds = \frac{1}{(ir)^n} \int_{I_1} F_n(s) \exp i r \psi(s) ds$$

en majorant la dernière intégrale, on trouve :

$$\left| \int_{I_1} \alpha_1(s) S(s) \exp i r \psi(s) ds \right| \leq \frac{\int_{I_1} |F_n(s)| ds}{r^n}$$

Et, par conséquent :

$$I(r) = O(r^{-\infty})$$

3ème cas : On suppose  $I_1$  de petite taille et contenant un point de phase réelle et stationnaire

On applique alors le lemme suivant (cf. [Cha] par exemple) :

Lemme 3.1 :

$$\begin{aligned} \text{si } \psi : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ s &\rightarrow \psi(s) \end{aligned}$$

est une fonction  $C^\infty$  telle que :

$$a \in I, \quad \frac{d\psi}{ds}(a) = 0, \quad \frac{d^2\psi}{ds^2}(a) \neq 0$$

alors, il existe  $J$  sous intervalle de  $I$  tel que pour toute fonction  $\alpha$ ,  $C^\infty$  à support compact inclus dans  $J$ , on ait :

$$\int_J \alpha(s) \exp i r \psi(s) ds = \left( \frac{2\pi i}{r \psi''(a)} \right)^{1/2} \alpha(a) \exp i r \psi(a) \left( 1 + O\left(\frac{1}{r}\right) \right)$$

où la racine carrée est choisie via la détermination principale du logarithme.

Considérons à présent les abscisses correspondant à des points particuliers, à savoir :

–  $s_1, s_2, \dots, s_n$  les points de phase réelle et stationnaire :

$$\psi'(s_l) = 0 \quad \text{et} \quad \psi(s_l) = 0 \quad l = 1, 2, \dots, n$$

–  $t_1, t_2, \dots, t_p$  les points de phase non réelle et stationnaire :

$$\psi'(t_j) = 0 \quad \text{et} \quad \text{Im}(\psi(t_j)) > 0$$

– éventuellement, si  $0,5 < \lambda < 0,75$ , les points  $r_1$  et  $r_2$  correspondant à un zéro de  $\exp i r \psi(s)$  (cf. Paragraphe a de la sous-section 2.4),  $r_k$  vérifie :

$$\gamma(r_k) = \pm \varphi^*_{\text{h}}.$$

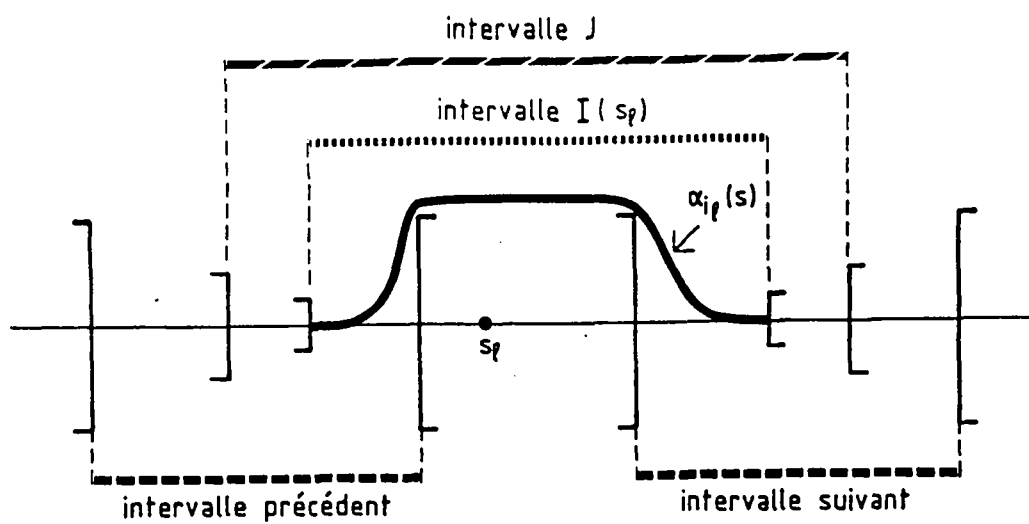
Supposons  $\varepsilon$  assez petit pour que :

1. Pour tout  $l = 1, \dots, n$

–  $s_l$  appartienne à un unique intervalle  $I_l$ , soit  $I(s_l)$ ,

–  $\psi(s_l)$  reste réelle sur  $I(s_l)$ ,

–  $I(s_l)$  est inclus dans l'intervalle  $J$ , du lemme 3.1

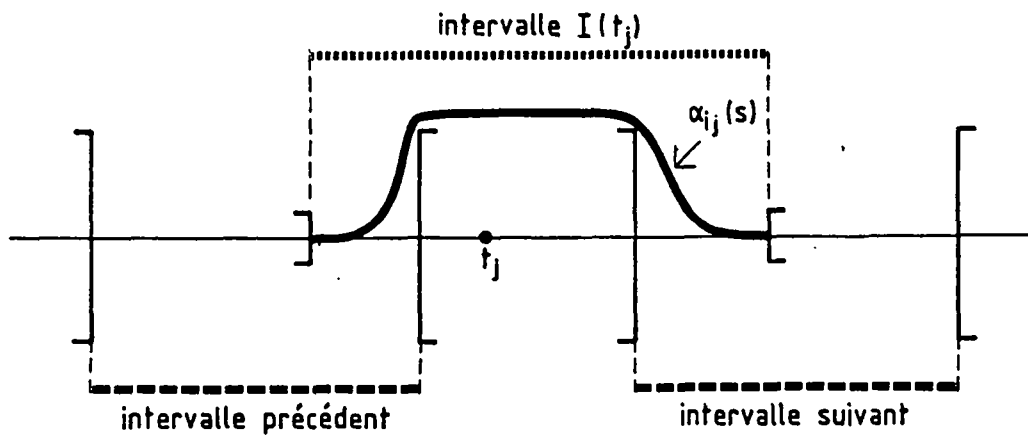


$$\Psi(s) \in \mathbb{R} \text{ sur } I(s_p)$$

$$\text{Cas } \dot{\Psi}(s_p)=0, \Psi(s_p) \in \mathbb{R}$$

2. Pour tout  $j = 1, 2, \dots, p$

- $t_j$  appartient à un seul intervalle  $I_i$ , soit  $I(t_j)$ ,
- $\text{Im}(\psi(s))$  reste strictement positive sur  $I(t_j)$

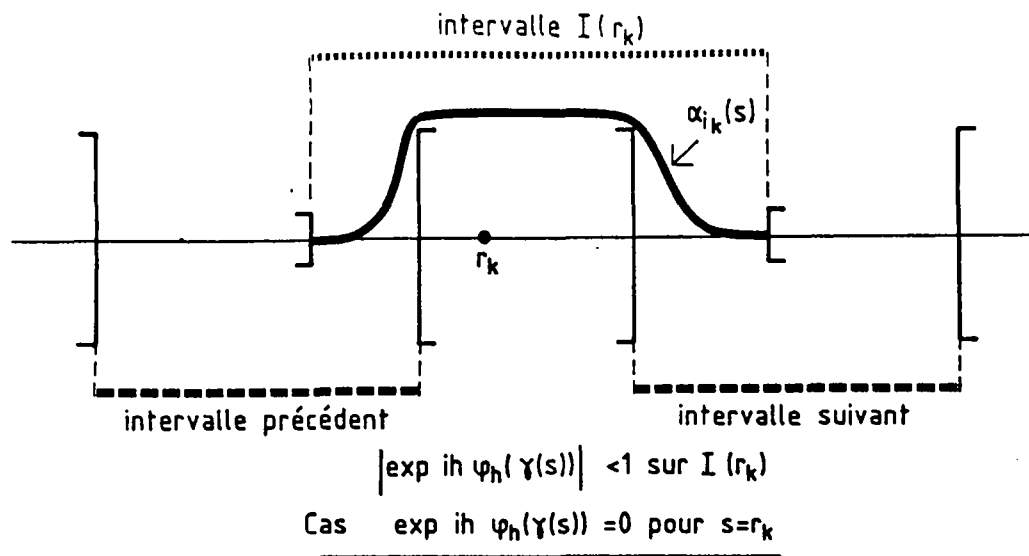


$$\text{Im}\{\psi(s)\} > 0 \text{ sur } I(t_j)$$

$$\text{Cas } \dot{\Psi}(t_j)=0, \text{Im}\Psi(t_j)>0$$

3. Eventuellement, si  $r_1, r_2$  existent pour  $k = 1, 2$

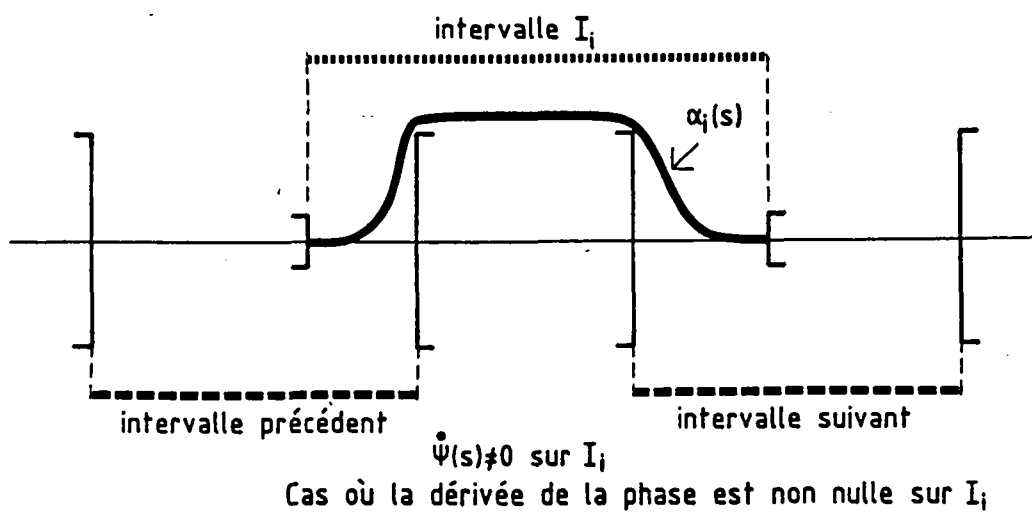
- $r_k$  appartient à un seul intervalle, soit  $I(r_k)$ ,
- $|\exp i r \psi(s)| = |\exp i h \varphi_h(\gamma(s))|$  reste inférieur à l'unité sur  $I(r_k)$ .



Si toutes ces conditions sont remplies et si  $I$  est l'un des intervalles  $I_0 \cup I_{N_\varepsilon}$  ou

bien  $I_i$ ,  $i = 1, \dots, N_\varepsilon - 1$ , l'intégrale  $\int_{I_i} \alpha_i(s) F(s) \exp i r \psi(s) ds$  se traite :

- soit comme dans le cas 1, si  $I$  est l'un des intervalles  $I(t_j)$  ou  $I(r_k)$ . Sa contribution asymptotique est alors au plus exponentiellement décroissante ;
- soit comme dans le cas 3, si  $I$  est l'un des intervalles  $I(s_j)$ . Sa contribution asymptotique est alors en  $1/\sqrt{r}$ .
- Soit comme dans le cas 2 si  $I$  n'est pas un intervalle de la liste ci-dessus. Dans ce cas, la dérivée de la phase est non nulle sur  $I$  et la contribution de l'intégrale est au plus en  $O(r^{-\infty})$ .



En conclusion, le développement asymptotique est donc bien donné par les contributions des points de phase réelle et stationnaire.

En remarquant que :

$$\frac{d\psi}{ds}(s_1) = 0 \Leftrightarrow \gamma'(s_1) \phi_h(\gamma(s_1), \Theta) = 0$$

On a bien :

$$\gamma(s_1) = k \quad \text{avec } k \in K_\lambda(\omega h, \Theta)$$

Les points de phase stationnaire pour  $\phi_h$  correspondent aux points de phase stationnaire pour  $\psi$ .

Comme, par ailleurs :

$$\begin{cases} \frac{d^2\psi}{ds^2}(s_1) = (\gamma'(s_1))^2 \phi_h(\gamma(s_1), \Theta) \\ \phi_h(\gamma(s_1), \Theta) = |\sin \Theta| \phi_h(k) \end{cases}$$

On trouve finalement :

$$u_*^h(r, \Theta) = \sum_k \frac{i\gamma'(s_1) F_n(k) \exp i r \phi_h(k, \Theta)}{\sqrt{-2i\pi (\gamma'(s_1))^2 |\sin \Theta| \phi_h(k)}} \left(1 + o\left(\frac{1}{r}\right)\right)$$

qui n'est autre que (3.6) compte tenu de (3.3) et de l'orientation de  $\Gamma$  ( $\gamma'(s) > 0$  pour tout  $s$ ).  $\square$

### 3.3. ETUDE DU CHAMP NUMERIQUE

Nous nous intéressons dans cette partie aux propriétés du champ géométrique numérique. Comme pour le champ géométrique, ce champ est défini par l'intermédiaire d'un angle  $\Theta^*_h$  qui permet de construire la zone d'ombre et les zones éclairées. La grande différence existant entre cas discret et cas continu réside dans le fait que cet angle est distinct de l'angle d'incidence  $\theta$ . Dans un premier paragraphe nous donnons une interprétation géométrique à  $\Theta^*_h$  en le reliant aux courbes de lenteur du schéma  $S_1$ , puis nous nous intéressons au cas où  $\omega h$  est petit. Nous comparons quantitativement les schémas  $S_1$ ,  $S_{2/3}$  et  $S_{5/6}$  en étudiant l'ouverture de la zone d'ombre en fonction de l'angle d'incidence et pour deux valeurs de  $\omega h$  (5 et 10 points par longueur d'onde). Enfin, nous traitons rapidement le cas où  $\omega h$  est grand ; apparaissent alors des situations tout à fait paradoxales où la zone d'ombre est placée dans une partie du plan d'où l'onde incidente est censée provenir. On lève ce paradoxe en utilisant la notion de vitesses de groupe.

#### a) Présentation générale du champ géométrique

Le champ géométrique numérique est défini à partir de trois secteurs angulaires :

la zone d'ombre  $\Omega^{h_0}$   
 $u_G^h = 0$

la zone éclairée par l'onde incidente  $\Omega^{h_I}$  :  
 $u_G^h = u_I^h$

la zone éclairée par l'onde incidente et par l'onde réfléchie  $\Omega^{h_R}$  :  
 $u_G^h = u_I^h + u_R^h$

Ces trois secteurs sont déterminés à partir d'un angle  $\Theta^*_h$  et par l'axe porté par la fissure :

si  $0 \leq \Theta < \Theta^*_h$        $(r, \Theta) \in \Omega^{h_0}$

si  $\Theta^*_h < \Theta < 2\pi - \Theta^*_h$        $(r, \Theta) \in \Omega^{h_I}$

si  $2\pi - \Theta^*_h < \Theta \leq 2\pi$        $(r, \Theta) \in \Omega^{h_R}$

Le point remarquable est que l'angle  $\Theta_h^*$  diffère de l'angle d'incidence  $\theta$ .

## 1. L'angle d'incidence $\theta$

Rappelons que cet angle d'incidence a été défini comme l'angle polaire du vecteur d'onde incident,

Si  $\omega_h(\theta)$  désigne le module du vecteur  $k$  ; on a :

$$\begin{cases} k_x = \omega_h(\theta) \cos \theta \\ k_y = \omega_h(\theta) \sin \theta = + \varphi_h(k_x) \end{cases}$$

et l'onde incidente s'écrit :

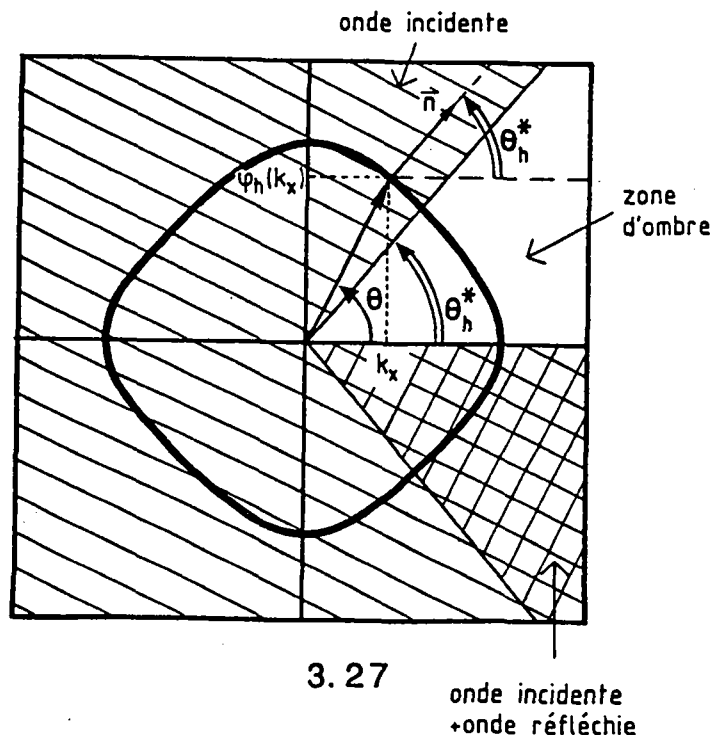
$$u_I^h(ph, qh) = \exp i(ph k_x + qh \varphi_h(k_x)) = \exp i\omega_h(\theta) r \cos(\theta - \Theta)$$

tandis que l'onde réfléchie donnée par :

$$u_R^h(ph, qh) = \exp i(ph k_x - qh \varphi_h(k_x)) = \exp i\omega_h(\theta) r \cos(\theta + \Theta)$$

Il est intéressant de noter que les lois de réflexions sont identiques en numérique et en continu : il y a conservation de la composante du nombre d'onde  $k_x$  sur l'axe de la fissure.

## 2. L'angle $\Theta_h^*$



D'après la section 3.1, l'angle  $\Theta_h^*$  est donné par la relation :

$$\phi_h(k_x, \Theta_h^*) = 0$$

soit :

$$\varphi_h(k_x) = - \frac{\cos \Theta_h^*}{|\sin \Theta_h^*|}$$

Cette relation s'interprète simplement à l'aide d'arguments géométriques : on introduit la courbe de lenteur  $\Gamma_{h,\lambda}(\omega)$  du schéma  $S_\lambda$ , courbe du plan  $(k_1, k_2)$  d'équation :

$$\begin{cases} D_{\lambda,h}(k_1, k_2) = \omega^2 \\ (k_1, k_2) \in \left[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right] \end{cases}$$

ou encore (cf. chapitre 2) :

$$\begin{cases} k_2 = \pm \varphi_h(k_1) \\ (k_1, k_2) \in \left[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right] \end{cases}$$

Le vecteur d'onde incident est alors élément de cette courbe et le vecteur  $(\cos \Theta_h^*, \sin \Theta_h^*)$  n'est rien d'autre que le vecteur normal, en ce point.

Le fait que la courbe de lenteur ne soit pas circulaire implique alors naturellement que l'angle d'incidence soit distinct de l'angle  $\Theta_h^*$ .

Nous étudierons plus en détail les propriétés de la courbe de lenteur au cours de l'analyse du comportement asymptotique de l'onde diffractée (section 3.4). Ici, nous nous contenterons de savoir que :

- 1) les courbes sont symétriques par rapport aux axes :  $k_1 = 0, k_2 = 0, k_1 = k_2, k_1 = -k_2$ .



- 2) Elles ne possèdent qu'une composante connexe centrée sur l'origine et apparaissent comme des cercles déformés lorsque :

$$\omega^2 h^2 < \min [4, 8(2l - 1)]$$

- 3) Elles sont des approximations d'ordre 2 du cercle unité.

Ce dernier point montre que le champ géométrique discret est une approximation à l'ordre 2 du champ géométrique continu :

$$\Theta_h = \theta + O(\omega^2 h^2)$$

b) Etude numérique pour  $\omega h$  petit

Au cours de cette étude, nous nous sommes intéressés au comportement de 3 schémas :

$$\left| \begin{array}{ll} \lambda = \frac{3}{4} & \text{schéma } Q_1 \\ \lambda = 1 & \text{schéma } P_1 \\ \lambda = \frac{5}{6} & \text{schéma Arakawa} \end{array} \right.$$

puis nous nous sommes placés dans le cas où le pas d'espace est suffisamment petit.

Plus précisément, nous avons choisi d'étudier deux cas :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega h = 2\pi H = 2\pi \cdot 0.1 \\ \omega h = 2\pi H = 2\pi \cdot 0.2 \end{array} \right.$$

$H$  s'interprète comme l'inverse du nombre de points par longueur d'onde (la vitesse de propagation est égale à 1 dans cette étude). On a donc :

$$\left\{ \begin{array}{ll} H = 0.1 & 10 \text{ points par longueurs d'onde} \\ H = 0.2 & 5 \text{ points par longueurs d'onde} \end{array} \right.$$

Nous avons présenté sur la figure 3.1 les variations de la fonction :

$$F : \theta \longrightarrow \Theta^*_h - \theta$$

On notera tout d'abord que pour les angles  $\theta$  multiples de 45 degrés, l'angle  $\Theta^*_h$  est toujours confondu avec  $\theta$ . Cela provient des symétries de la courbe de lenteur. Ces symétries impliquent par ailleurs une périodicité de 90° de la fonction F.

D'autre part, il est remarquable que le schéma  $P_1$  surestime la zone d'ombre lorsque  $\theta$  est inférieur à 45° puis la sous-estime lorsque  $\theta$  dépasse 45°.

A contrario, le schéma  $Q_1$  sous-estime la zone d'ombre puis la surestime.

Pour ces deux schémas, l'erreur ne dépasse pas :

- 5 degrés pour 5 points par longueur d'onde,
- 1 degré pour 10 points par longueur d'onde.

Le schéma intermédiaire ( $\lambda = 5/6$ ) apparaît comme le meilleur des trois : l'erreur est pratiquement nulle pour 10 points par longueurs d'onde tandis qu'elle n'excède pas 0.5 degré pour 5 points par longueur d'onde. Cette propriété était attendue puisque le schéma d'Arakawa est le plus isotrope de la famille, c'est celui dont les courbes de lenteur restent le plus longtemps de forme circulaire.

### c) Etude pour $\omega h$ grand

Lorsque  $\omega h$  devient grand, la courbe de lenteur n'est plus composée d'une seule composante connexe (cf. section suivante) et le champ géométrique peut paraître tout à fait paradoxal !

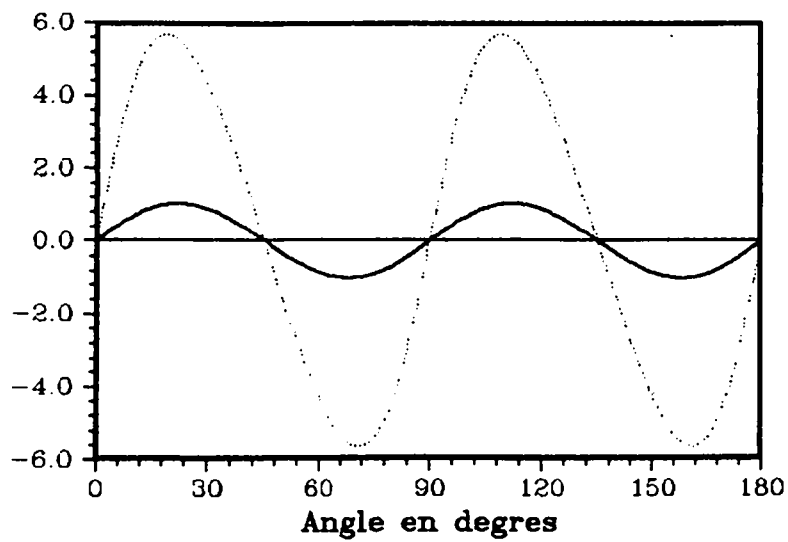
Considérons par exemple le cas où :

$$\frac{1}{2} < \lambda < \frac{3}{4} \quad \text{et} \quad 8(2\lambda - 1) < \omega h < \frac{1}{1 - \lambda}$$

et choisissons une onde incidente  $k$  comme indiqué sur le schéma ci-dessous :

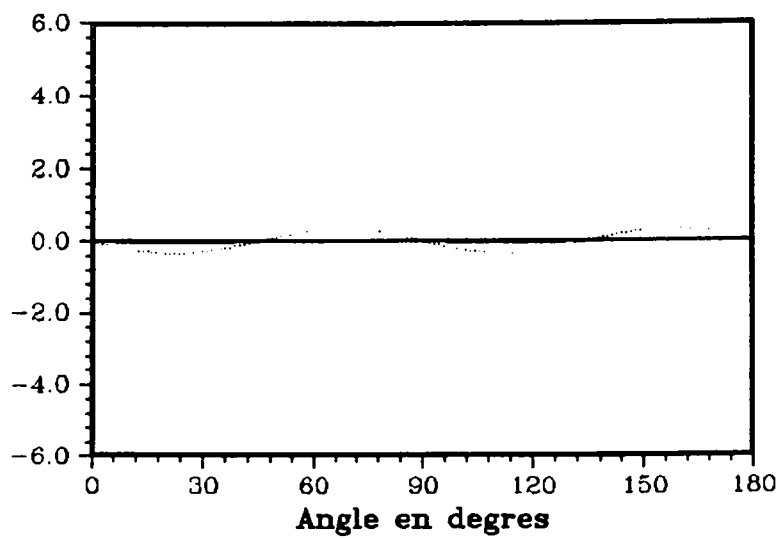
Legende	
—	H : 0.1
....	H : 0.2

$$\Theta_h^*(\theta) - \theta$$



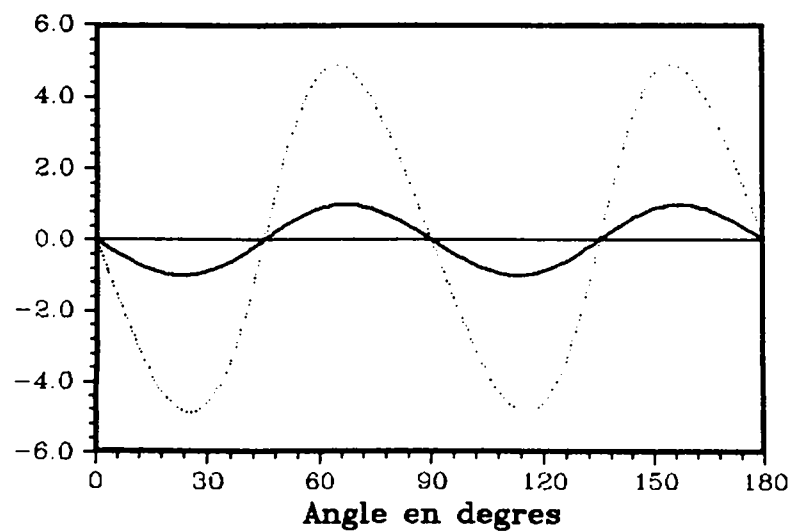
SCHEMA  $\lambda : 2/3$

$$\Theta_h^*(\theta) - \theta$$



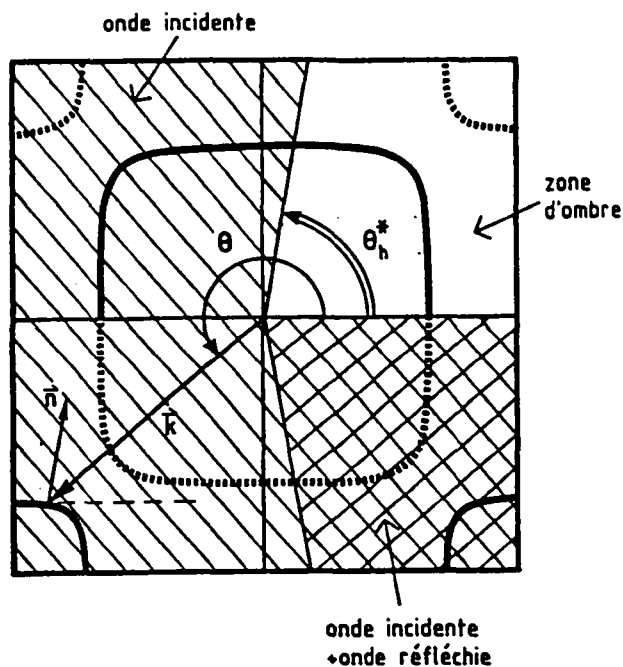
SCHEMA  $\lambda : 5/6$

$$\Theta_h^*(\theta) - \theta$$



SCHEMA  $\lambda : 1$





La zone d'ombre apparaît alors située à l'arrière des fronts d'ondes tandis que l'onde réfléchie existe dans une partie du plan qui semble inaccessible à l'onde incidente de par la présence de la fissure.

Ce paradoxe peut être levé en raisonnant, non plus sur les vitesses de phases mais sur les vitesses de groupe (cf. [Tre]). Celles-ci sont définies par :

$$\vec{V}_g(k_1, k_2) = \vec{\nabla} \omega(k_1, k_2) = \left( \frac{\partial \omega}{\partial k_1}, \frac{\partial \omega}{\partial k_2} \right)$$

Il est facile de voir que ce vecteur est porté par la normale  $\vec{n}$  à la courbe de lenteur au point  $(k_1, k_2)$ . L'angle  $\Theta_h^*$  s'interprète donc comme la direction de propagation de la vitesse de groupe.

Lorsque l'on reprend un à un les schémas du paragraphe 2, on vérifie que les points correspondent toujours à un point de la courbe de lenteur telle que le vecteur unitaire :

$$\vec{n} = \frac{\vec{\nabla} \omega}{||\vec{\nabla} \omega||}$$

pointe vers le haut.

A la lumière de ces remarques, il apparaît clairement que  $\Theta_h^*$  devrait légitimement représenter la direction de propagation de l'onde harmonique incidente et se substituer à l'angle  $\theta$ . Ainsi, l'interprétation physique des phénomènes s'en trouverait plus aisée.

### 3.4. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE L'ONDE DIFFRACTÉE

#### 3.4.1. Etude des points de phase stationnaire

La formule générale (3.6) fait clairement apparaître l'importance de l'ensemble  $K_\lambda(\omega h, \Theta)$  des points où la phase  $\Phi_h(k, \Theta)$  est stationnaire. Nous allons pour étudier cet ensemble, introduire la courbe de lenteur  $\Gamma_{h,\lambda}(\omega)$  du schéma  $S_\lambda$ , courbe du plan  $(k_1, k_2)$  d'équation :

$$(3.11) \quad \begin{cases} D_{\lambda,h}(k_1, k_2) = \omega^2 \\ (k_1, k_2) \in \left[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right] \end{cases}$$

que l'on peut réécrire sous la forme :

$$(3.12) \quad 4 \sin^2 \frac{k_1 h}{2} + 4 \sin^2 \frac{k_2 h}{2} + 16(1-\lambda) \sin^2 \frac{k_1 h}{2} \sin^2 \frac{k_2 h}{2} = \omega^2 h^2$$

Il est très facile de voir que :

$$\Gamma_h^\lambda(\omega) = \left(\Gamma_h^\lambda\right)^+(\omega) \cup \left(\Gamma_h^\lambda\right)^-(\omega)$$

où nous avons posé :

$$\left(\Gamma_h^\lambda\right)^\pm(\omega) = \left\{ (k_1, k_2) \in \left] \frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h} \right[ \middle/ k_2 = \pm \varphi_h^\lambda(k) \right\}$$

où  $\varphi_h^\lambda$  désigne la fonction jusqu'alors notée  $\phi_h$  pour alléger les notations.

Comme  $\Gamma_h^\lambda(\omega)$  est une courbe de  $D_h^\lambda$ , pour tout point  $(k_1, k_2)$  de  $\Gamma_h^\lambda$  le vecteur :

$$n(k_1, k_2) = \frac{\nabla D_h^\lambda(k_1, k_2)}{||\nabla D_h^\lambda(k_1, k_2)||}$$

définit un vecteur unitaire normal à  $\Gamma_h^\lambda(\omega)$  que nous appellerons vecteur unitaire normal sortant.

Comme la phase  $\Phi_h(k, \Theta)$  s'écrit :

$$\Phi_h(k, \Theta) = \cos \Theta k + \sin \Theta \varphi_h(k)$$

$$(3.13) \quad \frac{\partial}{\partial k} \Phi_h(k, \Theta) = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dk} \left[ \varphi_h^\lambda(k) \right] = -\omega \operatorname{tg} \Theta$$

On définit alors  $E_\lambda(\omega h, \Theta)$  l'ensemble du plan  $(k_1, k_2)$  par :

$$E_h(\omega h, \Theta) = \left\{ \vec{k}(\omega h, \Theta) \in \Gamma_h^\lambda(\omega) / n(\vec{k}(\omega h, \Theta)) = (\cos \Theta, \sin \Theta) \right\}$$

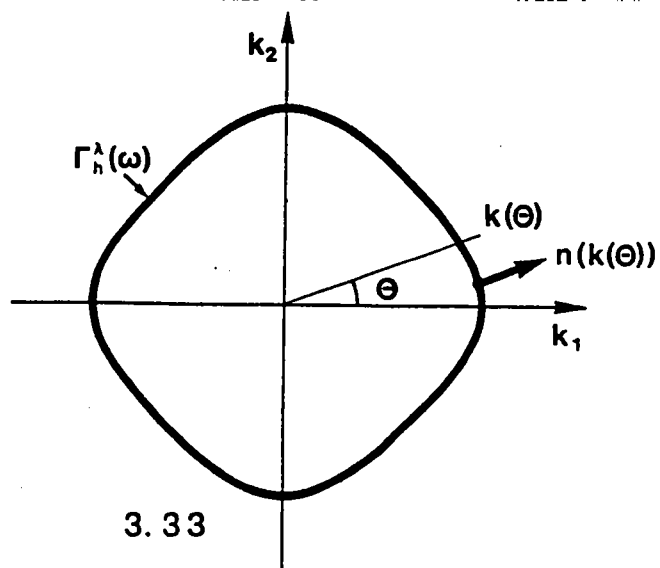
c'est-à-dire l'ensemble des points de la courbe de lenteur en lesquels le vecteur unitaire normal sortant coïncide avec le vecteur  $(\cos \Theta, \sin \Theta)$ . la formule (3.13) montre qu'on a l'équivalence :

$$k \in K_\lambda(\omega h, \Theta) \Leftrightarrow \left( k, \varphi_h^\lambda(k) \right) \in E_\lambda(\omega h, \Theta)$$

Par conséquent, l'étude de l'ensemble  $K_\lambda(\omega h, \Theta)$  est équivalent à celle de l'ensemble  $E_\lambda(\omega h, \Theta)$  lequel est clairement lié à la géométrie de la courbe  $\Gamma_h^\lambda(\omega)$ .

Notons toutefois dès à présent que, pour tout schéma, la courbe  $\Gamma_h^\lambda(\omega)$  est proche d'un cercle, ainsi que le montre la formule 3.12 : par conséquent, elle se présente comme une courbe fermée et convexe contenant l'origine.

Dans ce cas, il est clair que l'ensemble  $E_\lambda(\omega h, \Theta)$  ne contient qu'un seul point comme l'illustre la figure ci-dessous :



Lorsque  $\omega h$  devient grand, il convient d'étudier avec soin la géométrie des courbes  $\Gamma_h^{\lambda}(\omega)$ . Pour cela, nous remarquons tout d'abord que si  $(k_1, k_2)$  est un point de  $\Gamma_h^{\lambda}(\omega)$ , le point  $(k'_1, k'_2)$  défini par :

$$\begin{cases} k'_1 = \frac{\pi}{h} - k_1 \\ k'_2 = \frac{\pi}{h} - k_2 \end{cases}$$

vérifie l'égalité :

$$4 \cos^2 \frac{k'_1 h}{2} + 4 \cos^2 \frac{k'_2 h}{2} - 16(1-\lambda) \cos^2 \frac{k'_1 h}{2} \cos^2 \frac{k'_2 h}{2} = \omega^2 h^2$$

ce que l'on peut réécrire, pour  $\lambda \neq \frac{3}{4}$  :

$$4 \sin^2 \frac{k'_1 h}{2} + 4 \sin^2 \frac{k'_2 h}{2} + 16 \frac{(1-\lambda)}{4\lambda-3} \sin^2 \frac{k'_1 h}{2} \sin^2 \frac{k'_2 h}{2} = \frac{8 - \omega^2 h^2}{4\lambda-3}$$

Introduisons alors les nombres  $(\lambda', \omega')$  définis par :

$$\begin{cases} 1 - \lambda' = \frac{1 - \lambda}{4\lambda - 3} \\ \omega'^2 h^2 = \frac{8 - \omega^2 h^2}{4\lambda - 3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda' = \frac{2 - 3\lambda}{3 - 4\lambda} \\ \omega'^2 h^2 = \frac{8 - \omega^2 h^2}{4\lambda - 3} \end{cases} \quad (3.14)$$

Nous voyons que, lorsque  $\lambda > \frac{3}{4}$ , si nous désignons par S la symétrie par rapport au carré de sommets  $\left\{ \left(0, \frac{\pi}{h}\right), \left(0, -\frac{\pi}{h}\right), \left(\frac{\pi}{h}, 0\right), \left(-\frac{\pi}{h}, 0\right) \right\}$ , alors on a l'identité :



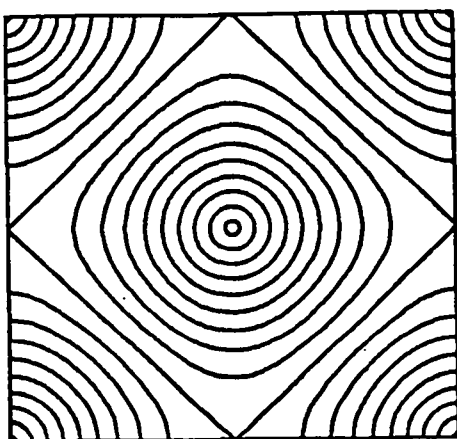
$$\Gamma_h^{\lambda'}(\omega') = S\left(\Gamma_h^{\lambda}(\omega)\right)$$

La fonction  $\lambda \rightarrow \frac{2-3\lambda}{3-4\lambda}$  est involutive et échange de façon bijective les ensembles  $\left]\frac{3}{4}, 1\right[$  et  $]1, +\infty[$ . Elle a par ailleurs deux points fixes qui sont  $\lambda = \frac{1}{2}$  et  $\lambda = 1$ , ce qui se voit facilement en remarquant que (3.14) se réécrit :

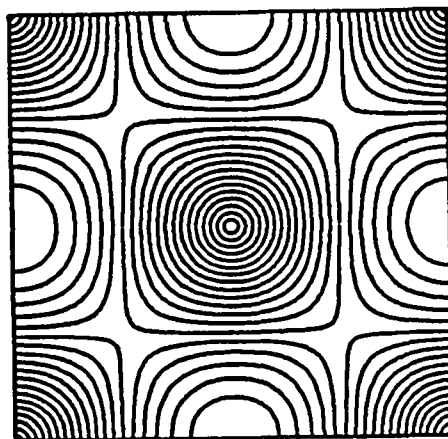
$$(3.15) \quad 4\lambda\lambda' - 3(\lambda + \lambda') + 2 = 0$$

Ceci prouve que l'ensemble des courbes  $\Gamma_h^{\lambda}(\omega)$  est globalement invariant par la transformation S et seulement si  $\lambda = 1$  ou  $\lambda = \frac{1}{2}$ .

### Illustration graphique



$\lambda=1$



$\lambda=\frac{1}{2}$

Rappelons que les courbes  $\Gamma_h^1(\omega)$  se déduisent des courbes  $\Gamma_h^{1/2}(\omega)$  par rotation d'angle  $\pi/4$  et homothétie de rapport  $\sqrt{2}$  (cf. interprétation des schémas en termes de schémas à 5 points).

Nous déduisons de ce qui précède que l'étude des courbes  $\Gamma_h^{\lambda}$  pour  $\lambda = \frac{3}{4}$  peut se restreindre à  $\lambda$  dans l'intervalle  $\left]\frac{3}{4}, 1\right[$  ; ce qui se passe pour  $\lambda$  dans l'intervalle  $]1, +\infty[$  se déduit de ce qui se passe pour  $\lambda$  dans  $\left]\frac{3}{4}, 1\right[$ .

En fait, deux ingrédients interviennent dans la détermination de  $E_\lambda(\omega h, \theta)$  :

- le nombre de composantes connexes fermées (modulo  $\frac{2\pi}{h}$ ) de  $\Gamma_h^\lambda(\omega)$ ,
- la convexité de la courbe, le long de chaque composante connexe.

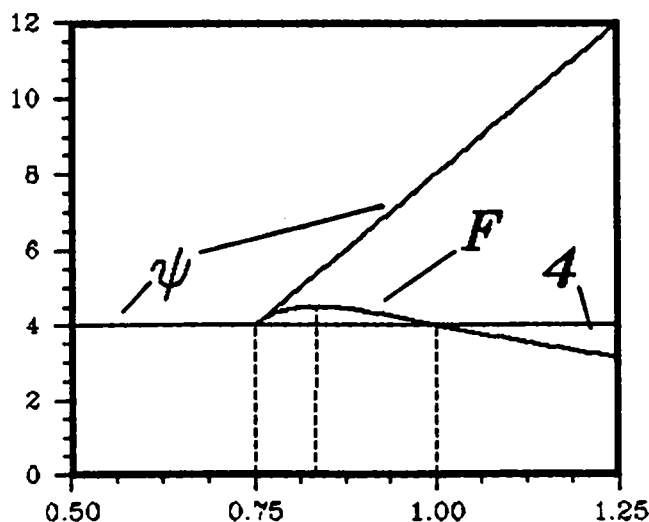
C'est précisément au niveau de l'étude de la convexité des courbes  $\Gamma_h^\lambda(\omega)$  que l'on fait apparaître, pour  $\lambda = \frac{3}{4}$ , une nouvelle valeur critique du paramètre  $\omega h$ . Cette valeur est donnée par :

$$\omega^2 h^2 = 4 \frac{(3\lambda - 2)}{(2\lambda - 1)^2} = F(\lambda)$$

Elle est obtenue en écrivant que la courbure de Gauss de la courbe  $\Gamma_h^\lambda(\omega)$  (qui est bien évidemment liée à la dérivée seconde  $(\phi_h^\lambda)''(k)$ ) s'annule au point d'intersection de  $\Gamma_h^\lambda(\omega)$  et de la première bissectrice  $k_1 = k_2$ .

Avant de préciser la signification exacte de  $F(\lambda)$  vis à vis de la géométrie de  $\Gamma_h^\lambda(\omega)$ , représentons les variations de  $F(\lambda)$  en fonction de  $\lambda$  (que nous comparons avec celles de la fonction  $\psi(\lambda)$  qui définit rappelons-le, la borne supérieure de l'intervalle des valeurs «possibles» pour le paramètre  $\omega^2 h^2$ ). On montre que  $F(\lambda)$  n'a de réelle signification que pour  $\lambda \geq \frac{3}{4}$  et que par ailleurs :

$$\begin{aligned} F(\lambda) &\leq 4 && \text{pour } \lambda > 1 \\ F(\lambda) &\geq 4 && \text{pour } \lambda < 1 \end{aligned}$$



On peut montrer (voir [Ba], annexe) que :

– Pour  $\frac{1}{2} < \lambda < \frac{3}{4}$  :

la courbe  $\Gamma_h^\lambda(\omega)$  ne présente jamais de point d'inflexion, pour  $\omega^2 h^2 \in [0, \psi(\lambda)]$

– Pour  $\frac{3}{4} < \lambda < 1$  , alors :

- la courbe  $\Gamma_h^\lambda(\omega)$  ne présente aucun point d'inflexion lorsque  $\omega^2 h^2 \in ]0, 4[ \gg ]F(\lambda), \psi(\lambda)[$ .
- Elle présente exactement 8 points d'inflexion (disposés de façon symétrique par rapport aux axes de coordonnées et aux deux bissectrices), lorsque  $\omega^2 h^2 \in ]4, F(\lambda)[$ .

– Pour  $\lambda > 1$  , alors :

- La courbe  $\Gamma_h^\lambda(\omega)$  ne présente aucun point d'inflexion tant que  $\omega^2 h^2 \rightarrow ]0, F(\lambda)] \cup ]4, \psi(\lambda)[$  ;
- Elle en a 8, lorsque  $\omega^2 h^2 \in ]F(\lambda), 4[$ .

Lorsque l'on étudie le nombre de composants connexes (modulo  $\frac{2\pi}{h}$ ) de  $\Gamma_h^\lambda(\omega)$ , on fait intervenir deux nouvelles valeurs critiques :

$$\begin{cases} \omega^2 h^2 = G(\lambda) = \frac{1}{1-\lambda} \\ \omega^2 h^2 = H(\lambda) = 8(2\lambda - 1) \end{cases} \quad \lambda \in \left] \frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right[$$

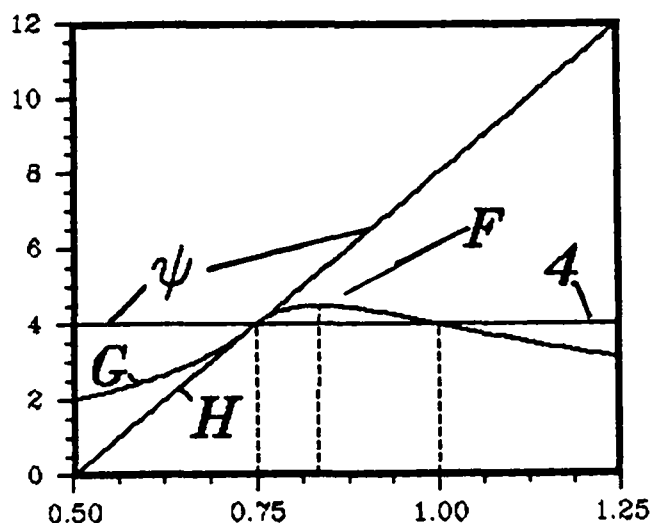
que nous avons déjà évoquées au chapitre 2 (cf. section 2.3). Ces valeurs ne jouent un rôle effectif que lorsque  $\lambda \in \left] \frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right[$  (on notera que  $H(\lambda)$  est confondu avec  $\psi(\lambda)$  lorsque  $\lambda > \frac{3}{4}$ ).

- Pour  $\frac{1}{2} < \lambda < \frac{3}{4}$ 
  - $\Gamma_h^\lambda(\omega)$  a une composante connexe si  $\omega^2 h^2 \leq H(\lambda)$  ;
  - $\Gamma_h^\lambda(\omega)$  a deux composante connexes si  $H(\lambda) < \omega^2 h^2 < G(\lambda)$
  - $\Gamma_h^\lambda(\omega)$  a deux composantes connexes si  $G(\lambda) < \omega^2 h^2 < 4$ .
- Pour  $\lambda > \frac{3}{4}$  :

$\Gamma_h^\lambda(\omega)$  ne présente qu'une composante connexe (modulo  $2\pi/h$ ).

Pour rassembler l'information, nous avons représenté les variations des fonctions  $F(\lambda)$ ,  $G(\lambda)$ ,  $H(\lambda)$  et  $\psi(\lambda)$  sur un même graphe, puis dressé un résultat récapitulatif des résultats que nous venons d'énoncer. A titre anecdotique, on notera que :

- les fonctions  $G(\lambda)$  et  $F(\lambda)$  se raccordent de façon  $C^1$  en  $\lambda = \frac{3}{4}$ ,
- La fonction  $F(\lambda)$  est maximum pour  $\lambda = \frac{5}{6}$ , c'est-à-dire pour le schéma d'Ara-kawa (le plus isotrope).



Premier cas ,  $\frac{1}{2} < \lambda < \frac{3}{4}$  :

$\omega^2 h^2$	0	H( $\lambda$ )	G( $\lambda$ )	$\psi(\lambda)$
Composantes connexes	1	2	2	
Points d'inflexion	0	0	0	

Deuxième cas ,  $\frac{3}{4} < \lambda < 1$  :

$\omega^2 h^2$	0	4	F( $\lambda$ )	$\psi(\lambda)$
Composantes connexes	1	1	1	
Points d'inflexion	0	8	0	

Troisième cas ,  $\lambda > 1$

$\omega^2 h^2$	0	F( $\lambda$ )	4	$\psi(\lambda)$
Composantes connexes	1	1	1	
Points d'inflexion	0	8	0	

Cette étude nous permet de dresser un tableau du nombre de points de l'ensemble  $E_{\lambda}(\omega h, \Theta)$ , en fonction des valeurs des paramètres  $\omega h$  et  $\lambda$ .

Premier cas ,  $\frac{1}{2} < \lambda < \frac{3}{4}$  :

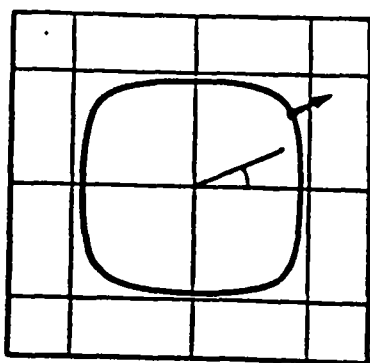
$(\omega h)^2$	0	$H(\lambda)$	$G(\lambda)$	$4 = \psi(\lambda)$
$E_{\lambda}(\omega h, \Theta)$	1 point $\forall \Theta$	2 points $\forall \Theta$	2 points $\forall \Theta$	

Deuxième cas ,  $\frac{1}{2} < \lambda < \frac{3}{4}$  :

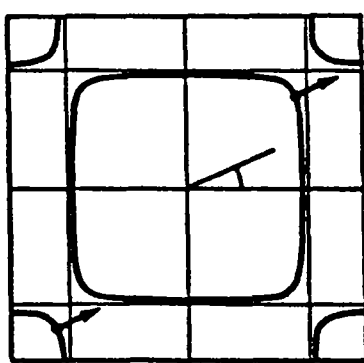
$(\omega h)^2$	0	4	$F(\lambda)$	$\psi(\lambda)$
$E_{\lambda}(\omega h, \Theta)$	1 point $\forall \Theta$	1, 2 ou 3 points suivants $\Theta$		1 point $\forall \Theta$

Troisième cas ,  $\lambda > 1$  :

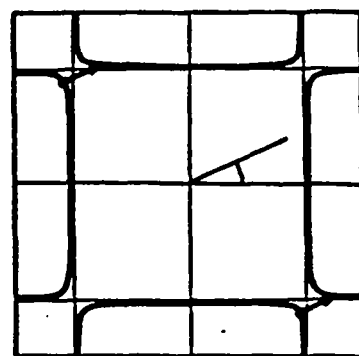
$(\omega h)^2$	0	$F(\lambda)$	4	$\psi(\lambda)$
$E_{\lambda}(\omega h, \Theta)$	1 point $\forall \Theta$	1, 2 ou 3 points suivants $\Theta$		1 point $\forall \Theta$



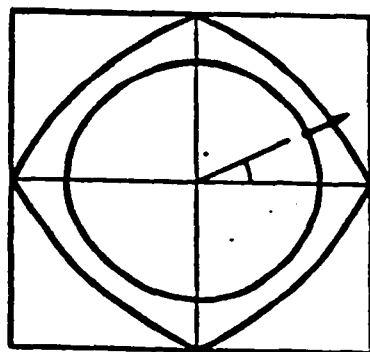
$$0 < \omega^2 \eta^2 < H(\lambda)$$



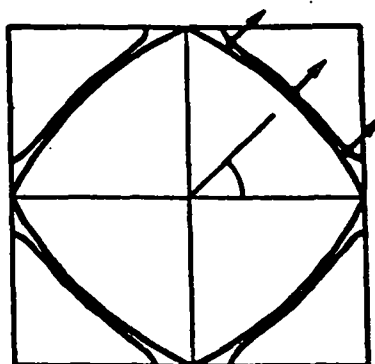
$$H(\lambda) < \omega^2 \eta^2 < G(\lambda)$$



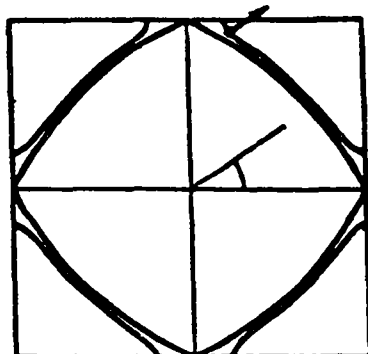
$$G(\lambda) < \omega^2 \eta^2 < \Psi(\lambda)$$



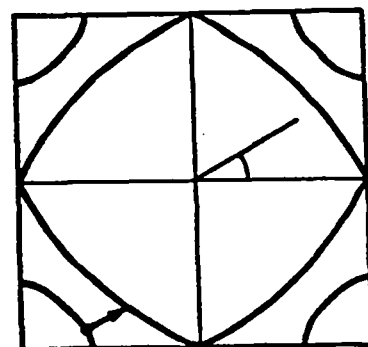
$$0 < \omega^2 \eta^2 < 4$$



$$4 < \omega^2 \eta^2 < F(\lambda)$$



$$4 < \omega^2 \eta^2 < F(\lambda)$$



$$F(\lambda) < \omega^2 \eta^2 < \Psi(\lambda)$$

Les figures qui suivent explicitent de façon plus «concrète» les points de l'ensemble  $E_{\lambda}(\omega h, \Theta)$  dans les différents cas.

Les valeurs critiques :

$$-\omega^2 h^2 = 0, G(\lambda), \psi(\lambda) \quad \text{pour} \quad \frac{1}{2} < \lambda < \frac{3}{4}$$

$$-\omega^2 h^2 = 0, 4, F(\lambda), \psi(\lambda) \quad \text{pour} \quad \lambda > \frac{3}{4}$$

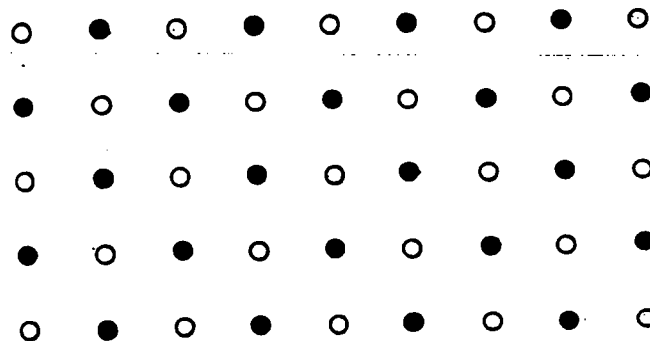
sont les valeurs pour lesquelles on ne peut pas appliquer le théorème de la phase stationnaire. (On ne peut pas dans ces cas préciser le comportement asymptotique du champ diffracté sans mener une étude plus approfondie).

Les figures correspondant au troisième cas  $\lambda > 1$  se déduisent des précédentes à l'aide de la transformation 3.

Bien entendu, il convient de mettre à part les schémas particuliers que notre étude paramétrique a permis de mettre en évidence, à savoir les schémas correspondant à  $\lambda = \frac{1}{2}$ ,  $\lambda = \frac{3}{4}$  et  $\lambda = 1$ .

Cas du schéma  $S_{1/2}$

Dans ce cas on a toujours deux points où la phase est stationnaire, c'est-à-dire deux termes dans le comportement asymptotique, quelle que soit la valeur du paramètre adimensionnel  $\omega h$ . Cela se conçoit bien lorsque l'on a pris conscience que, avec ce schéma, deux grilles décalées vibrent indépendamment l'une de l'autre.





### Cas du schéma $S_1$

Il s'agit d'un schéma «charnière» lorsque  $\lambda$  décrit l'intervalle  $\left] \frac{3}{4}, +\infty \right[$  dans la mesure où pour  $\lambda = 1$ , l'intervalle  $[4, F(\lambda)]$  est réduit à la seule valeur critique {4}. On constate alors que, pour toutes les valeurs de  $\omega h$ , l'ensemble des points où la phase stationne est réduit à un seul point, ce qui signifie que le comportement asymptotique de la solution se compose d'un seul terme. Toutefois, il y a une brutale discontinuité lorsque  $\omega^2 h^2$  passe la valeur critique 4 au-delà de laquelle apparaît un phénomène purement numérique de non convexité du front d'onde (voir [Ba]).

### Cas du schéma $S_{3/4}$

C'est le plus remarquable et celui dont le comportement est, dans un certain sens, le plus proche du cas continu. On a, comme pour  $\lambda = 1$ , toujours un seul terme dans le comportement asymptotique de la solution mais cette fois aucune valeur critique n'apparaît dans l'intervalle  $[0, \psi(\lambda)[$ . En particulier, il n'y a pas de phénomène parasite.

#### 3.4.2. Fronts d'ondes asymptotiques

Rappelons que  $\Theta$  fixé, le comportement asymptotique de la solution pour  $r$  grand s'écrit :

$$k \in \sum_{K_\lambda(\omega h, \Theta)} \frac{A(\omega h, \Theta) e^{i \Phi_h(k, \Theta) r}}{\sqrt{r \omega}}$$

Dans chaque terme nous faisons apparaître, au coefficient  $\frac{1}{\sqrt{\omega r}}$  près :

- un terme de phase  $e^{i \Phi_h(k, \Theta)}$
- un terme d'amplitude  $A(\omega h, \Theta)$

L'objet de cette section est d'étudier brièvement le terme de phase. Nous nous contenterons, pour ce qui est de la phase, d'un bref rappel descriptif des résultats qui coïncident avec ceux obtenus dans [Ba] et [Jo], rapports auxquels nous renvoyons le lecteur pour de plus amples informations.

Utilisons les notations de la section 3.4.1, le terme de phase s'écrit :

$$e^{i \vec{k}(\omega h, \Theta) \cdot \vec{\Theta} r} \quad \vec{k}(\omega h, \Theta) \in E_{\lambda}(\omega h, \Theta)$$

où nous avons posé :  $\vec{\Theta} = (\cos \Theta, |\sin \Theta|)$

Introduisons la vitesse de phase asymptotique dans la direction  $\Theta$  :

$$C_{\infty}(\omega h, \Theta) = \frac{1}{\vec{\Theta} \cdot \vec{k}(\omega h, \Theta)}$$

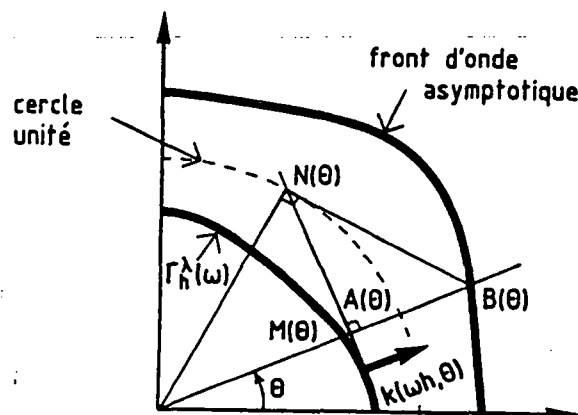
Le terme de phase se réécrit :

$$e^{\frac{i \omega r}{C_{\infty}(\omega h, \Theta)}}$$

Les fronts d'onde asymptotiques sont par définition les lieux des points vibrant en phase ; c'est-à-dire les iso-valeurs de la phase. Ils sont donc tous homothétiques de la courbe, que nous appellerons dans ce qui suit «front d'onde asymptotique» et dont l'équation en coordonnées polaires  $(r, \Theta)$  est :

$$r = C_{\infty}(\omega h, \Theta)$$

Cette courbe peut se caractériser géométriquement (voir [Jo]) comme étant la courbe polaire réciproque de la courbe de lenteur  $\Gamma_h^{\lambda}(\omega)$ . La construction géométrique est classique. Nous l'illustrons sur le dessin ci-dessous :



Construction géométrique du front d'onde asymptotique

Pour chaque onde :

- la dépendance du front par rapport au phénomène  $\omega h$  stigmatise le caractère dispersif de l'onde, donc du schéma numérique,
- la «non-circularité» du front, c'est-à-dire la dépendance de la vitesse de propagation asymptotique vis à vis de la direction de propagation  $\Theta$ , caractérisent l'anisotropie de la propagation.

Nous renvoyons donc le lecteur à [Ba] pour une illustration plus concrète de ces phénomènes. Signalons toutefois que, pour tous les schémas comme le comportement asymptotique ne comporte qu'un seul terme lorsque  $\omega h$  est suffisamment petit, l'anisotropie et la dispersion sont les seuls phénomènes mis en évidence au niveau des fronts d'onde. Toutefois, lorsque  $\omega h$  augmente, de nombreux phénomènes parasites apparaissent, tous liés aux propriétés géométriques des courbes de lenteur  $\Gamma_h^\lambda(\omega)$ . Nous nous contenterons ici d'en dresser une liste non exhaustive :

- Multiplicité des fronts d'ondes,
- Détriplement d'un front
- Non convexité et non bornitude du front
- Phénomène de rétrodiffusion...

### 3.4.3. Diagramme d'amplitude

Dans ce paragraphe, nous nous restreignons au cas où  $\omega h$  est suffisamment petit. Ainsi, le développement asymptotique de l'onde diffractée ne contient qu'une seule onde pseudo-sphérique :

$$u_h^* \sim \frac{A(\omega h, \Theta, \theta)}{\sqrt{\omega r}} \exp i \phi_h(k, \Theta) r$$

(On a fait apparaître explicitement la dépendance de  $A$  suivant l'angle d'incidence  $\theta$ ).

Notre propos est de comparer le terme d'amplitude numérique  $A(\omega h, \Theta, \theta)$  à son équivalent continu  $A(\Theta, \theta)$ .

Pour ce faire, nous commençons par analyser l'amplitude de l'onde diffractée du cas continu puis, en partant de l'expression donnée par la proposition (3.4), nous effectuons l'analogie sur le cas discret.

## A. Le cas continu

### a) Expression de l'amplitude

Dans le chapitre 0, nous avons rappelé le résultat classique de Sommerfeld qui exprime la solution du problème de diffraction à l'aide de la fonction de Fresnel. En utilisant le comportement asymptotique de cette fonction, on montre que l'amplitude de l'onde diffractée s'écrit sous la forme (cf. [No]) :

$$A(\theta, \Theta) = \left( \frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \frac{\cos \frac{1}{2} \Theta \sin \frac{1}{2} \theta}{\cos \Theta - \cos \theta} e^{i\pi/4}$$

Notons tout d'abord que ce résultat est bien cohérent avec celui que l'on obtient en passant à la limite ( $\omega h \rightarrow 0$ ) dans l'expression de  $A(\omega h, \Theta, \theta)$  (Proposition 3.4).

En effet, lorsque  $\omega h$  tend vers 0, il n'existe qu'un seul point de phase stationnaire pour chaque direction  $\Theta$  ; et il est facile de montrer que ce point  $k$  est bien tel que :

$$k = \omega \cos \Theta$$

D'autre part, en utilisant les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma^+(k) = \lim_{h \rightarrow 0} \gamma_h^+(k) = (k - \omega)^{1/2} \\ \varphi(k) = \lim_{h \rightarrow 0} \varphi_h(k) = (\omega^2 - k^2)^{1/2} \\ \varphi''(k) = \lim_{h \rightarrow 0} \varphi''(k) = -\omega^2 (\omega^2 - k^2)^{-3/2} \end{array} \right.$$

On vérifie que l'on a bien :

$$\lim_{\omega h \rightarrow 0} A(\omega h, \Theta, \theta) = A(\theta, \Theta)$$

soit :

$$A(\theta, \Theta) = i \sqrt{\frac{i\omega}{2\pi \varphi''(\omega \cos \Theta) |\sin \Theta|}} \frac{\gamma^+(\omega \cos \theta)}{\gamma^+(\omega \cos \Theta)} \frac{1}{\omega(\cos \theta - \cos \Theta)}$$

## b) Module et phase de l'amplitude : définitions et propriétés

Nous considérons la décomposition :

$$A(\theta, \Theta) = |A(\theta, \Theta)| \exp i \Psi(\theta, \Theta)$$

- $|A(\theta, \Theta)|$  est le module de l'amplitude ; ce module devient infini lorsque  $\Theta$  est confondu avec les angles  $\pm \theta$  qui délimitent les frontières des différentes zones du champ géométrique.
- $\Psi(\theta, \Theta)$  est la phase de l'amplitude ; c'est une fonction constante par morceaux ne prenant que les deux valeurs  $\pm \pi/4$ . La discontinuité apparaît là aussi lorsque l'angle d'observation se confond avec l'angle d'incidence ; les points situés en amont et en aval des directions  $\pm \theta$  vibrent asymptotiquement en quadrature.

Sur la figure 3.2, nous avons tracé les diagrammes d'amplitude asymptotiques pour les trois angles d'incidence  $\theta = 30^\circ$ ,  $90^\circ$  et  $150^\circ$ . Ces diagrammes sont obtenus en portant dans la direction  $\Theta$  le module  $A(\theta, \Theta)$  de l'onde diffractée ; les courbes ont donc pour équation :

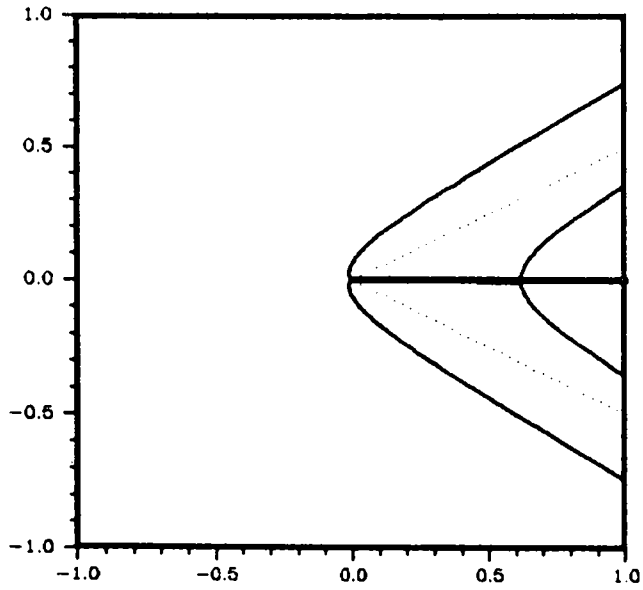
$$\begin{cases} x(\theta) = A(\theta, \Theta) \cos \Theta \\ y(\theta) = A(\theta, \Theta) \sin \Theta \end{cases}$$

On notera :

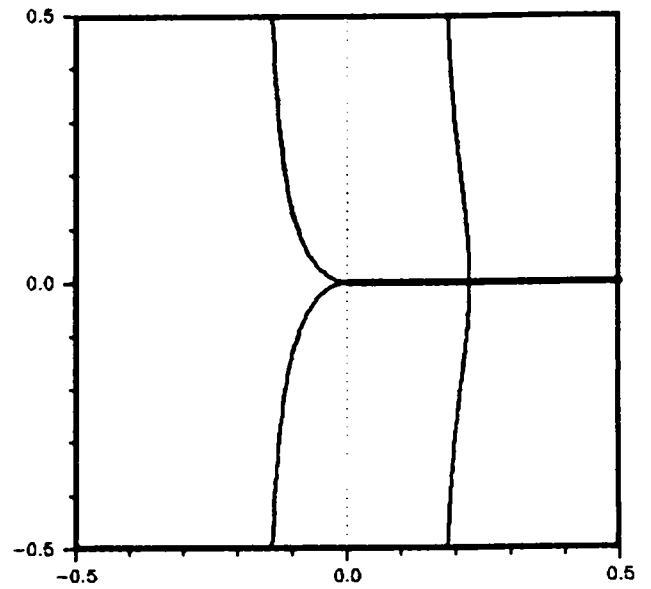
- le caractère symétrique de ces courbes par rapport à l'axe  $x = 0$ . Ceci est naturel d'après la relation :

$$A(\theta, \Theta) = A(\theta, 2\pi - \Theta)$$

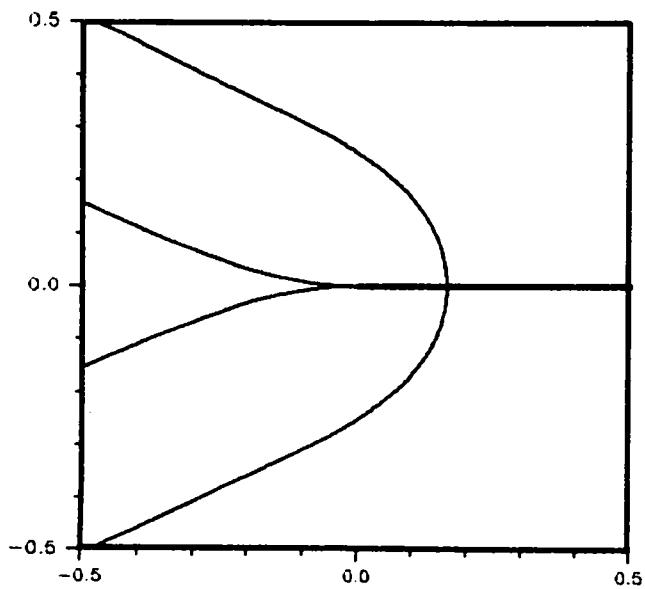
# *Diagramme d'amplitude*



**ANGLE D INCIDENCE  $\theta_i$  : 30 DEGRES**



**ANGLE D INCIDENCE  $\theta_i$  : 90 DEGRES**



**ANGLE D INCIDENCE  $\theta_i$  : 150 DEGRES**

- l'annulation de l'amplitude dans la direction  $\Theta = \pi$ . Ceci était attendu puisque le champ diffracté est identiquement nul sur la demi-droite :  $\{(x,0) ; x \leq 0\}$ .

## B) Le cas discret

### a) Expression de l'amplitude et propriété

Dans cette étude, nous nous intéressons au cas où la pulsation adimensionnelle  $\omega h$  est petite :

$$(\omega h)^2 < \min \{ 4, 8(2\lambda - 1) \}$$

Dans ce cas, (cf. 3.4.1) pour chaque direction  $\Theta$  il n'existe qu'un point de phase réelle et stationnaire :

$$K_\lambda(\omega h, \Theta) = \{ k_s \}$$

Le champ diffracté est alors composé asymptotiquement d'une seule onde divergente :

$$u_h^*(r, \Theta) \sim \frac{A(\omega h, \theta, \Theta)}{\sqrt{\omega r}} \exp i r \phi_h(k_s, \Theta)$$

où  $A(\omega h, \theta, \Theta)$  est donnée, d'après la proposition 3.4, par la formule :

$$A(\omega h, \theta, \Theta) = i \sqrt{\frac{i\omega}{2\pi \varphi_h''(k) |\sin \Theta|}} \frac{i h \gamma_h^+(k_x)}{(\exp i h (k_s - k_x) - 1) \gamma_h^+(k_s)}$$

On notera en particulier :

- que la propriété de parité est conservée pour le cas discret :

$$A(\omega h, \theta, \Theta) = A(\omega h, \theta, 2\pi - \Theta)$$

- que l'amplitude devient infinie dans les directions délimitant les différentes zones du champ géométrique discret.

Précisions ce dernier point : l'amplitude devient singulière si :

$$k_s = k_x$$

soit encore :

$$\phi_h(k_x, \Theta) = 0$$

ce qui s'écrit :

$$\phi_h(k) = \frac{-\cos \Theta}{|\sin \Theta|} = \frac{-\cos \Theta_h^*}{|\sin \Theta_h^*|}$$

et on retrouve bien la direction singulière définie par  $\Theta_h^*$ .

#### b) Comportement asymptotique lorsque $\omega h$ tend vers 0

Le comportement asymptotique de l'amplitude s'obtient de façon élémentaire en s'appuyant sur les résultats de l'annexe A.3 du chapitre 2 et en remarquant que l'on peut négliger (à  $0(\omega^2 h^2)$  près) les termes provenant :

- de la dérivée seconde de la phase  $\phi''_h$
- de la substitution du  $k_x$  et du  $k_s$  discrets à leurs équivalents continus.

Le résultat s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} A(\omega h, \theta, \Theta) = A(\theta, \Theta) (1 + i \alpha \omega h (\cos \theta - \cos \Theta) + 0(\omega^2 h^2)) \\ \alpha(\lambda) = \frac{1}{4} + \frac{\xi}{2(1-\xi)} \\ \xi = \operatorname{sgn}(4\lambda - 3) \left( \left| \frac{4\lambda - 1}{4\lambda - 3} \right| - \sqrt{\left( \frac{4\lambda - 1}{4\lambda - 3} \right)^2 - 1} \right) \end{array} \right.$$



L'amplitude numérique est donc une approximation d'ordre 1 de l'amplitude continue.

Précisons ce dernier point. De la même façon que pour le cas continu nous introduisons la phase de l'amplitude :

$$A(\omega h, \theta, \Theta) = |A(\theta, \Theta)| \exp i \psi(\omega h, \theta, \Theta)$$

Le comportement asymptotique se réécrit alors :

$$|A(\omega h, \theta, \Theta)| = |A(\theta, \Theta)| (1 + O(\omega^2 h^2))$$

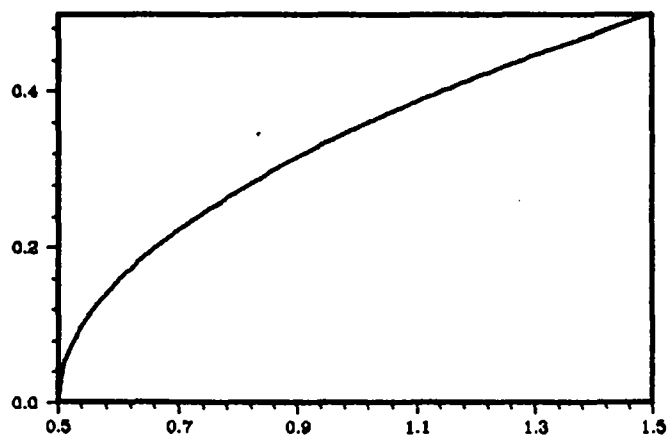
$$\psi(\omega h, \theta, \Theta) = \psi(\theta, \Theta) (1 + \text{Arctg}(\alpha(\lambda) \omega h (\cos \theta - \cos \Theta)) + O(h^2))$$

Ainsi le module de l'amplitude de l'onde diffractée numérique est une approximation d'ordre 2 de l'amplitude du cas continu. C'est au niveau de la phase de l'amplitude qu'intervient la correction d'ordre 1. La phase est très mal restituée par nos schémas numériques. Il faut toutefois tempérer cette remarque. En effet, on notera que :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1/2} \alpha(\lambda) = 0$$

Le schéma  $S_{1/2}$  apparaît ici comme le meilleur pour la restitution de la phase de l'amplitude !

### *Coefficient $\alpha(\lambda)$*



La figure ci-dessus représente les variations du coefficient  $\alpha(\lambda)$  : on remarque que ce coefficient croît en fonction de  $\lambda$ .

### c) Résultats numériques

Dans cette étude nous nous sommes intéressés au comportement de 3 schémas :

$\lambda = \frac{2}{3}$	Schéma $Q_1$
$\lambda = 1$	Schéma $P_1$
$\lambda = \frac{5}{6}$	Schéma Arakawa

et nous avons considéré trois valeurs de l'angle d'incidence :

$$\left| \begin{array}{l} \theta = 30^\circ \\ \theta = 150^\circ \\ \theta = 90^\circ \end{array} \right.$$

deux valeurs de  $\omega h$  :

$$\left| \begin{array}{l} \omega h = 2\pi H = 2\pi (0,1) = (\omega h)_1 \\ \omega h = 2\pi H = 2\pi (0,2) = (\omega h)_2 \end{array} \right.$$

$H = 0,1$  correspond à 10 points par longueurs d'onde tandis que  $H = 0,2$  correspond à 5 points.

Le schéma et l'angle d'incidence étant fixés, nous avons considéré deux séries de courbes : la première correspond aux diagrammes d'amplitude adimensionnels. Ils sont obtenus en traçant les courbes :

$$\left\{ \begin{array}{l} x(\Theta) = \frac{|A_\lambda(\omega h, \theta, \Theta)|}{|A(\theta, \Theta)|} \cos \Theta \\ \psi(\Theta) = \frac{|A_\lambda(\omega h, \theta, \Theta)|}{|A(\theta, \Theta)|} \sin \Theta \end{array} \right.$$

pour  $\omega h = (\omega h)_1$  et  $(\omega h)_2$

(En pratique, ces courbes sont évaluées pour  $\Theta$  variant de 0 à 180° par pas de 1 degré et les points  $k_s$  et  $k_x$  sont calculés à l'aide de sous-programmes de la bibliothèque IMSL).

La seule courbe correspond à la phase de l'amplitude. Elle correspond à l'étude de la fonction :

$$\Theta \longrightarrow \Psi_{\lambda}(\omega h, \theta, \Theta)$$

Les résultats sont présentées sur les planches 3.3 à 3.8.

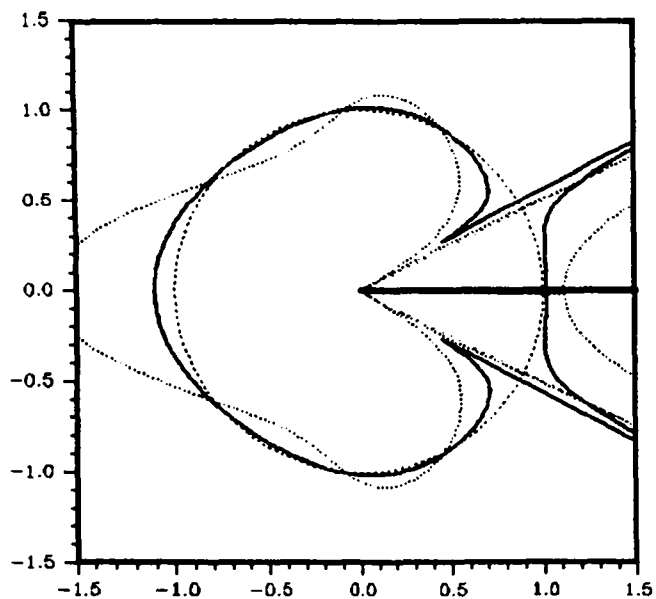
On notera :

- le bon comportement du schéma d'Arakawa ( $\lambda = 5/6$ ) au vu des courbes d'amplitudes adimensionnelles. Le schéma  $Q_1$  ( $\lambda = 2/3$ ) apparaît à ce niveau comme le moins précis des trois.
- le meilleur positionnement de l'angle critique, où la phase chute de  $\pi/2$ , pour le schéma Arakawa : nous avons déjà illustré ce phénomène dans la section 3.3.
- la lenteur de convergence de la phase pour les angles d'observation proches de 180°. A ce niveau, c'est le schéma  $Q_1$  qui apparaît comme le plus précis tandis que le moins bon est le schéma  $P_1$  ( $\lambda = 1$ ).

Terminons en remarquant que tous les diagrammes d'amplitude adimensionnels font apparaître plusieurs points où l'erreur d'amplitude s'annule pour les deux valeurs de  $\omega h$ . Nous n'avons pas réussi à expliquer ce phénomène et nous proposons ce problème à la sagacité du lecteur.

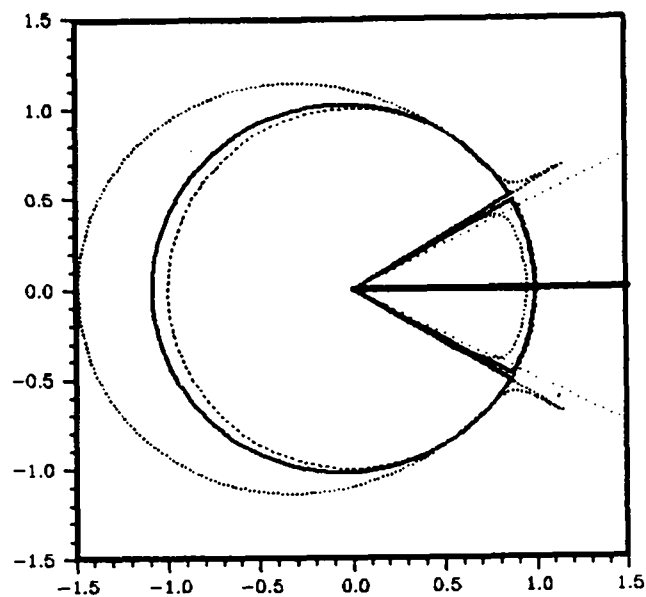
# DIAGRAMME D'AMPLITUDE ADIMENSIONNEL

ANGLE D'INCIDENCE  $\theta_i$  : 30 DEGRES

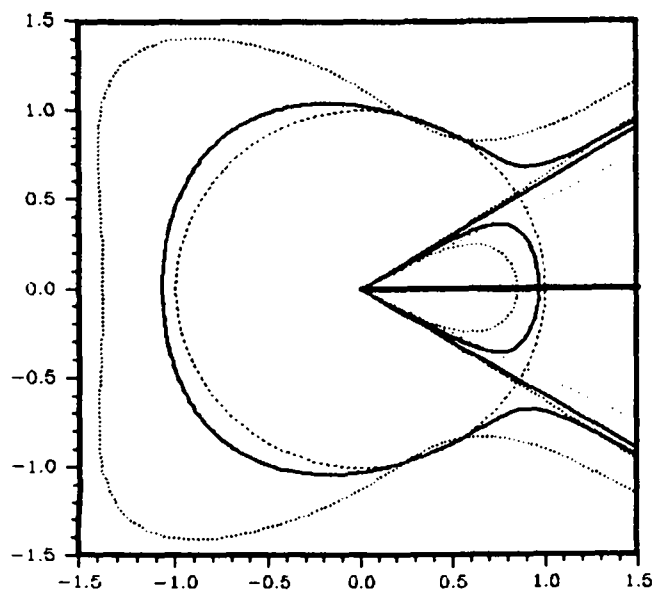


**SCHEMA  $\lambda : 2/3$**

LEGENDE	
—	H : 0.1
.....	H : 0.2
- - - -	Continu



**SCHEMA  $\lambda : 5/6$**

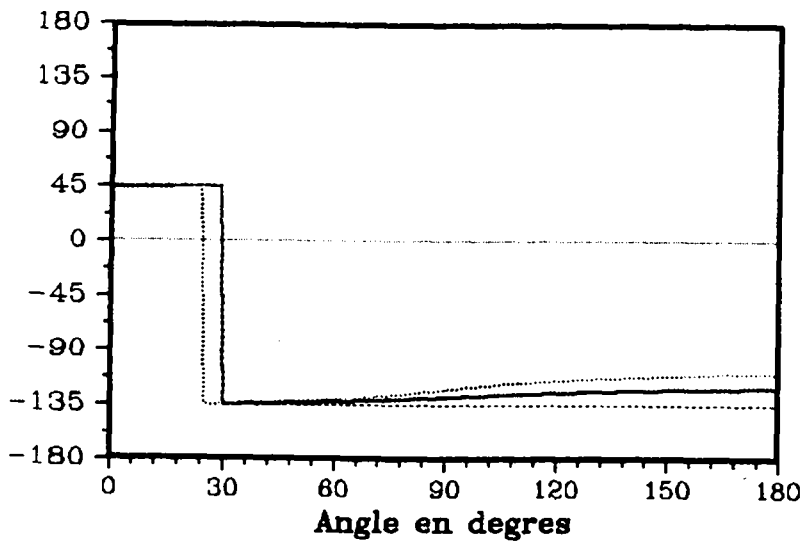


**SCHEMA  $\lambda : 1$**

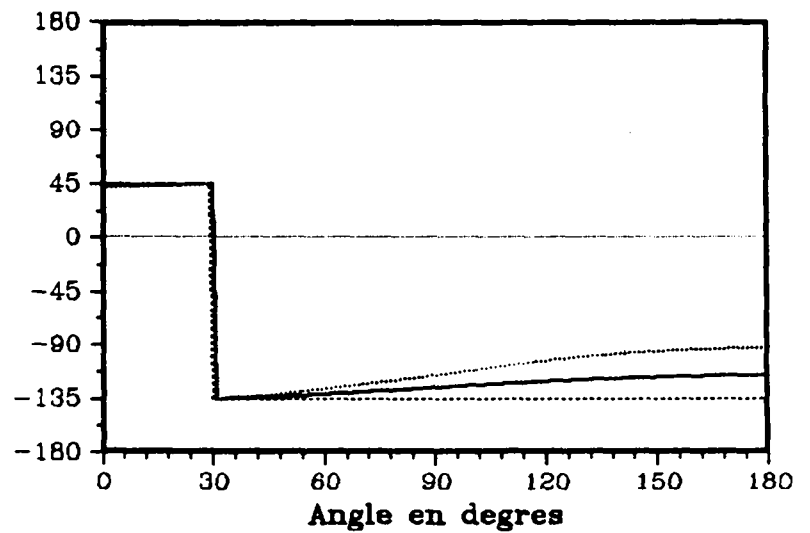
# PHASE DE L'AMPLITUDE

ANGLE D INCIDENCE  $\theta_i$  : 30 DEGRES

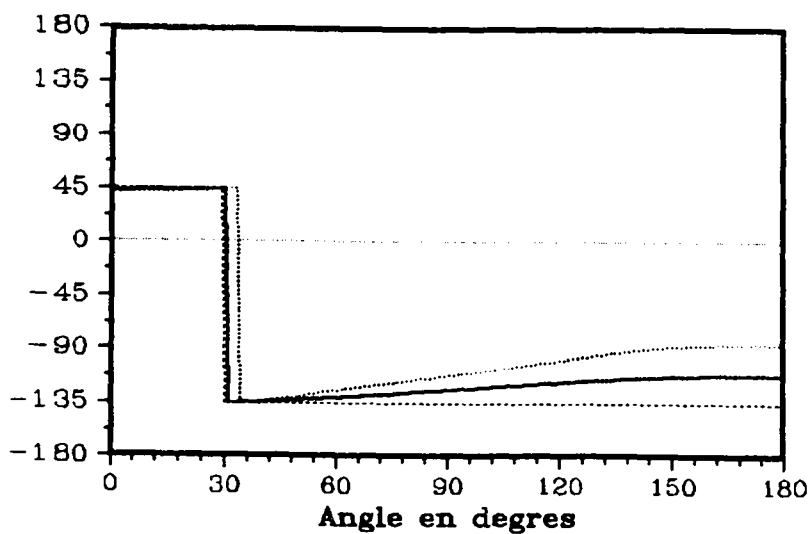
Legende	
—	H : 0.1
.....	H : 0.2
----	Continu



SCHEMA  $\lambda : 2/3$



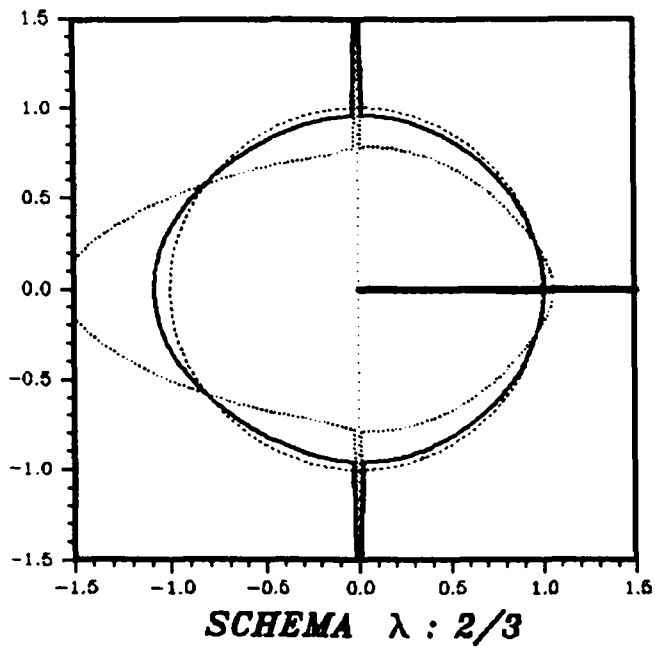
SCHEMA  $\lambda : 5/6$



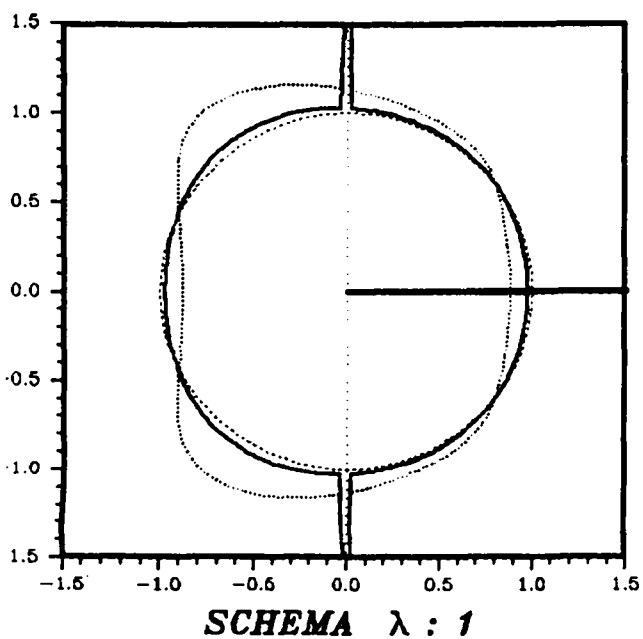
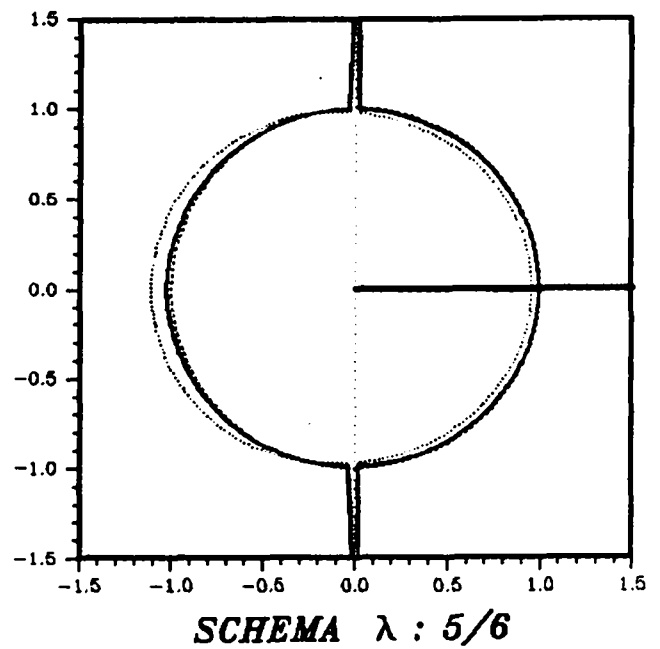
SCHEMA  $\lambda : 1$

# Diagramme d'amplitude adimensionnel

ANGLE D INCIDENCE  $\theta_i$  : 90 DEGRES



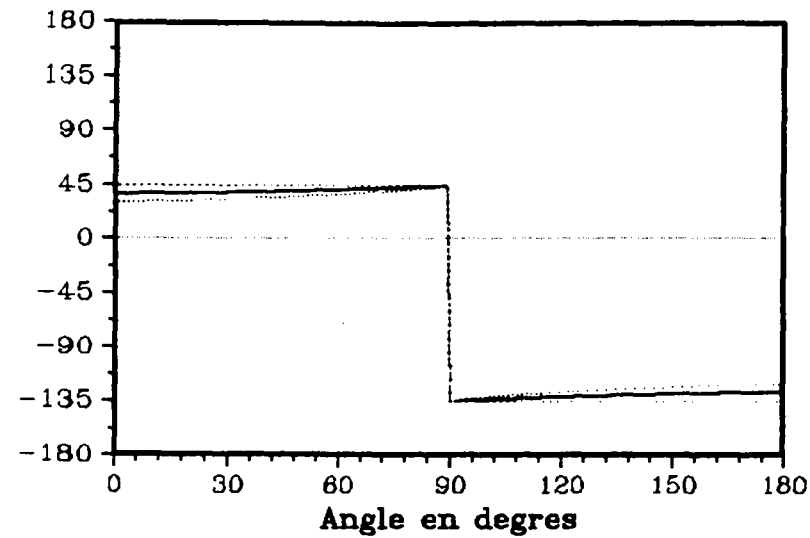
**LEGENDE**  
 —  $H : 0.1$   
 .....  $H : 0.2$   
 -.-.- Continuum



# PHASE DE L'AMPLITUDE

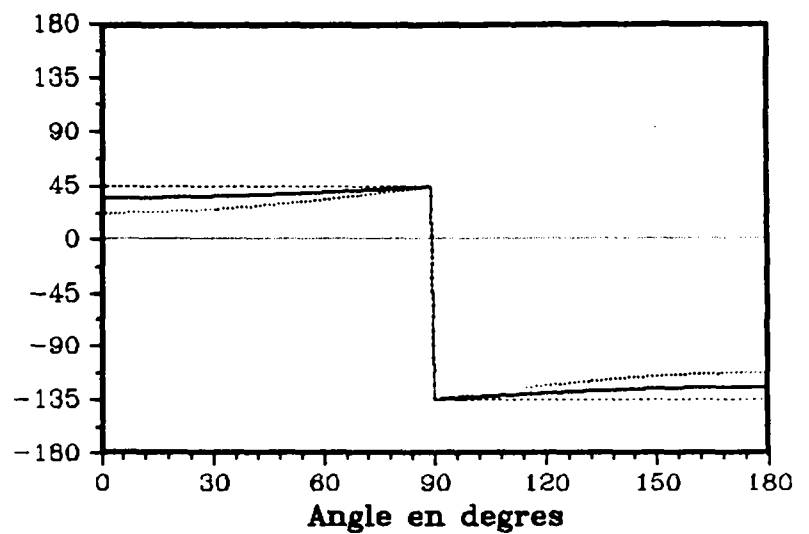
ANGLE D INCIDENCE  $\theta_i$  : 90 DEGRES

Legende	
—	H : 0.1
....	H : 0.2
.....	Continu

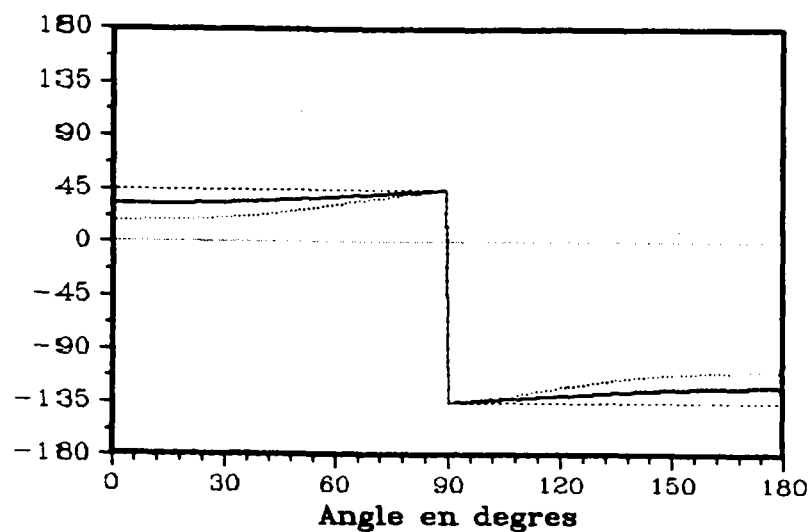


SCHEMA  $\lambda : 2/3$

SCHEMA  $\lambda : 5/6$

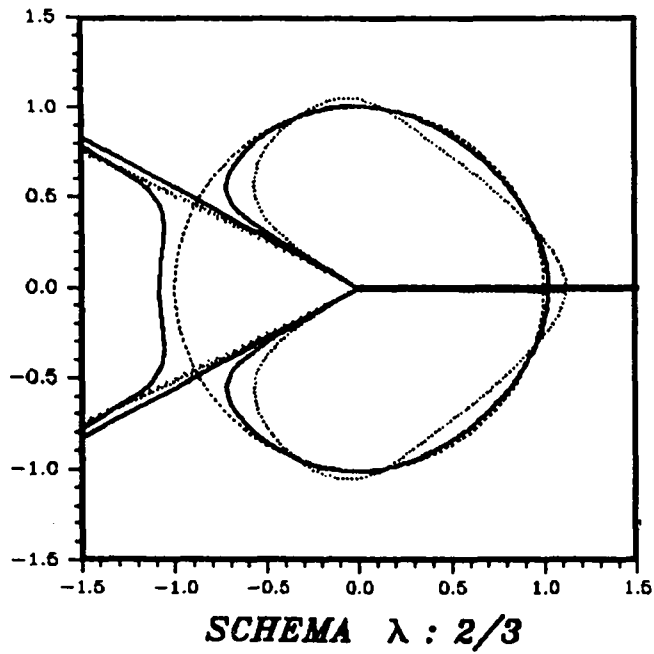


SCHEMA  $\lambda : 1$

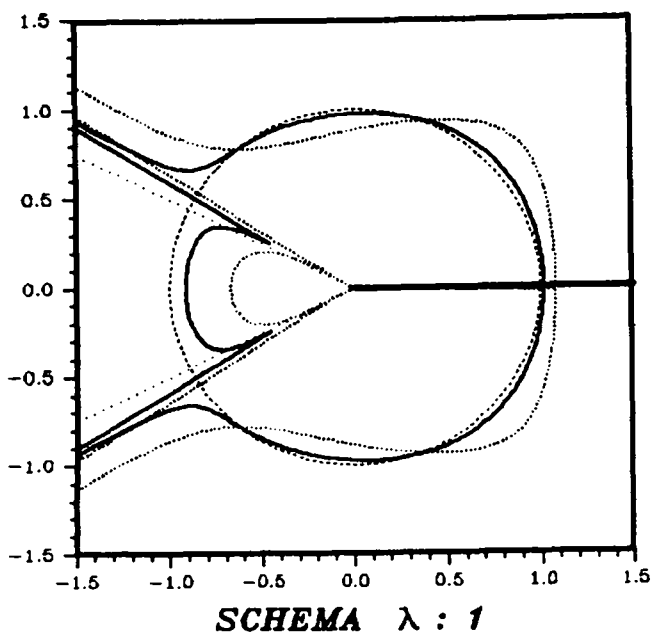
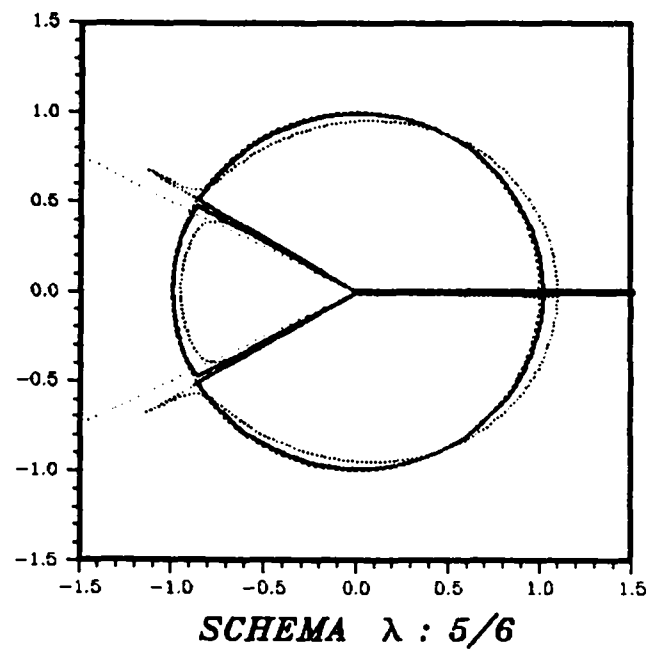


# DIAGRAMME D'AMPLITUDE ADIMENSIONNEL

ANGLE D INCIDENCE  $\theta_i$  : 150 DEGRES



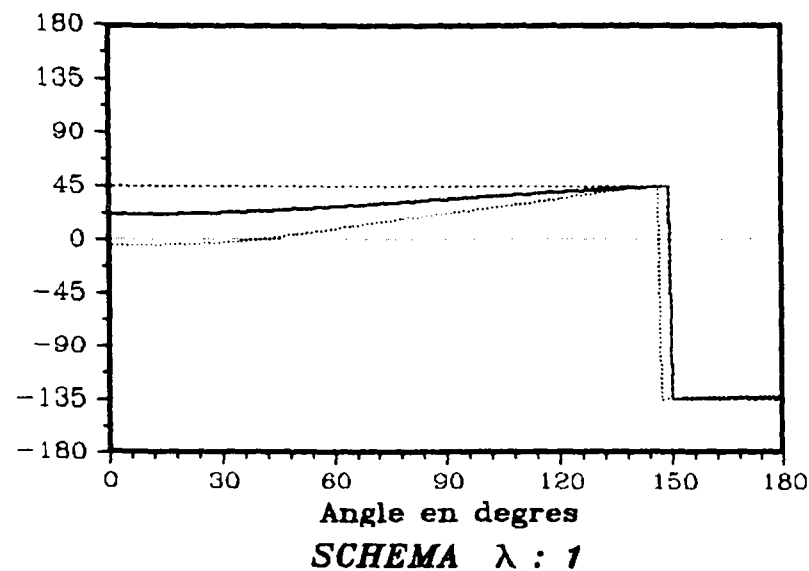
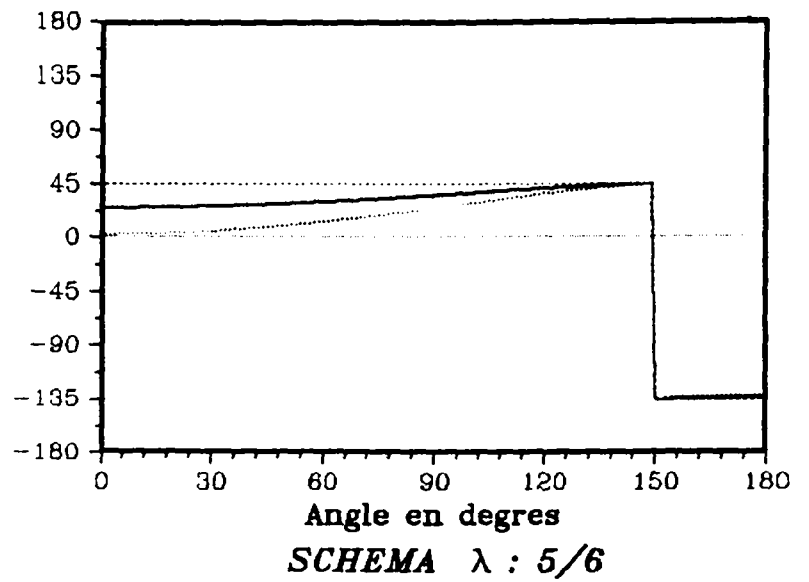
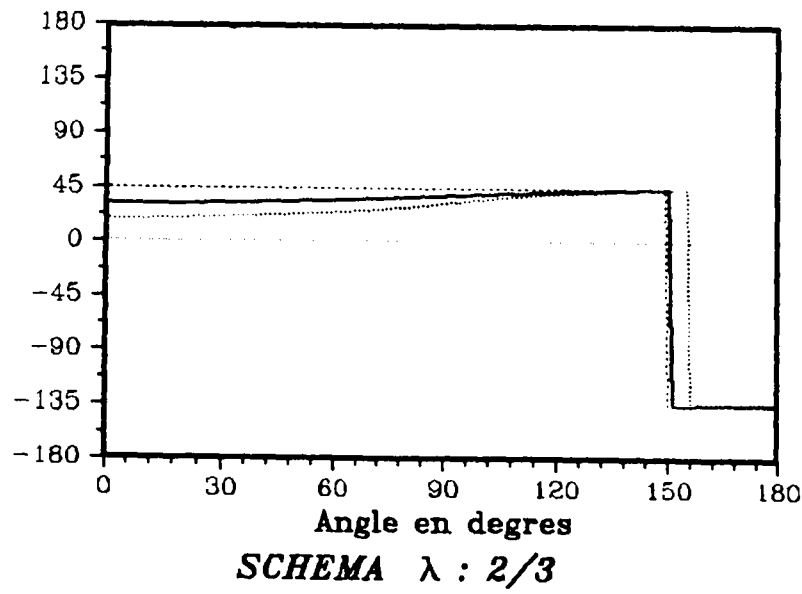
LEGENDE	
—	H : 0.1
....	H : 0.2
----	Continu





# PHASE DE L'AMPLITUDE

## ANGLE D INCIDENCE $\theta_i$ : 150 DEGRES



## BIBLIOGRAPHIE

- [ Ac1 ]      Achenbach, J.D., *Wave propagation in elastic solids*, North Holland, Amsterdam, 1973.
- [ Ac2 ]      Achenbach, J.D., Gantesen, A.K., McMaken, H., *Ray methods for waves in elastic solids*, Pitman.
- [ Al ]        Alford, R.M., Kelly, R., Boore, D.M., *Accuracy of finite difference modeling of the acoustic wave equation*, Geophysics, Vol. 39, n° 6, pp. 834-842, Decembre 1974.
- [ Ba ]        Bamberger, A., Guillot, J.C. , Joly, P. , *Diffraction numérique par un maillage régulier*, Report N° 103, 168 pp., 1984, Centre de mathématiques appliquées, Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau, France.
- [ Be ]        Belystchko, T., Mullen, R.P. , *Dispersion analysis of finite element semi-discretisations of the two-dimensional wave equation*, Int. J. for Num. Meth. in Eng., Vol 18, pp 11-19, 1982.
- [ Bl ]        Bleinstein, N., *Mathematical methods for wave phenomena*, Computer Science and Applied Mathematics, 1984.
- [ Ca ]        Cartan, H., *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou de plusieurs variables complexes*, enseignement des sciences, Hermann, 1975.
- [ Ci ]        Ciarlet, P. G., *The finite element for elliptic problems*, North Holland, 1978.
- [ Ch ]        Chazarain, J., Piriou, A., , *Introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires*, Gauthiers-Villars, 1981.
- [ Da ]        Dautrey, R., Lions, J.L., *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques* , Tome I, II et III, Collection CEA, Masson, 1985.
- [ Ei ]        Eidus, D.M., *The principle of limiting amplitude*, Russian Math. Survey, ol. 24, pp. 91-167, 1969.
- [ Gra ]        Graff, K.F., *Wave motion in elastic solids*, Ohio State University Press Colombus, Ohio, 1975.
- [ Gru ]        Grusin, V.V., *On sommerfield conditions for a certain class of*

*partial differential equations* , A.M.S., Trans., Ser. 2, 51, pp 82-112, 1966.

- [ Jo ] Joly, P., *Analyse numérique mathématique de problèmes liés à la propagation d'ondes acoustiques, élastiques et électromagnétiques*, Thèse de docteur es-science, Université de Paris IX-Dauphine, 1987.
- [ Ka ] Kato, T., *Perturbation theory for linear operators*, Springer-Verlag, 1984.
- [ Kn ] Knopp, K., *Theory of fonctions* , english translation, Parts I and II, New York: Dover 1945 and 1947.
- [ Lu ] Luke, *The special functions and their approximations*, Mathematics in science and engineering, Vol 53.1, Academic Press New York San Fransisco London, 1969.
- [ Ne ] Nedelec, L. ,*Approximations des Équations intégrales en mécanique et en physique*, Summer school, CEA INRIA EDF, 1977.
- [ Ni ] Nicoletis, L. ,*Simulation de la propagation d'ondes sismiques*, Thèse de Docteur ingénieur, Université Pierre et Marie Curie, 1981.
- [ No ] Noble, *Methods based on the Wiener-Hopf technique for the solution of partial differential equations*, ,Variant title :*The Wiener-Hopf technique*, 246 p., Pergamon Press, 1958.
- [ Ra ] Raviart, P.A., Thomas, J.M. *Analyse numériques des Équations aux dérivées partielles*, Masson, 1983.
- [ Ra ] Raviart, P.A., *Méthode des éléments finis*, Cours DEA Analyse numérique, Paris VI, 1972.
- [ Ri ] Richtmyer, R.D., Morton, K.W. , *Difference methods for initial value problems*, Interscience publishers, New York, 1987.
- [ So ] Sommerfield, A., *Optics, lectures on Theoretical physics*, Vol. IV, Academic Press, New York, 1954.
- [ Scw ] Schwartz, L., *Théorie des distributions* ,Hermann, 1966. Paris VI, 1972.
- [ Tr ] Trefethen, L., *Group Velocity in finite difference schemes*,SIAM Review, Vol. 24, N°2, Avril 1982.

- [ Wi ]      Wilcox, C.H.,    *Asymptotic wave functions and energy distributions in strongly propagative anisotrope media*, J. Math Pures et Appliquées, 57, pp. 275-321, 1978.
- [ Wi ]      Wilcox, C.H.,    *Scattering theory for the Dalember equation in exterior domain*, lecture note in Mathematics, Springer Verlag, 1975.

## ANNEXE

### a) Présentation du contenu de l'annexe :

Nous avons regroupé dans cette annexe tous les calculs techniques concernant l'étude de la fonction :

$$\gamma_{\varepsilon,h}(k) = -\frac{i}{h} (2\lambda - 1 + 2(1 - \lambda) \cos hk) \sin (h \varphi_{\varepsilon,h}(k))$$

où  $\varphi_{\varepsilon,h}(k)$  est défini par le système :

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2(a + 2b \cos hk) \cos (h \varphi_{\varepsilon,h}(k)) \\ \\ = - (c_h(\varepsilon) + 2a \cos hk) \end{array} \right. \quad (A1.1)$$

$$\text{Im} (\varphi_{\varepsilon,h}(k)) > 0 \quad (A1.2)$$

$$\text{Réelle} (\varphi_{\varepsilon,h}(k)) \in \left] -\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h} \right[ \quad (A1.3)$$

avec :

$$c_h(\varepsilon) = (\omega h)^2 + i\varepsilon \omega h^2 - 4\lambda \quad (A1.4)$$

$$a = 2\lambda - 1 \quad (A1.5)$$

$$b = 1 - \lambda \quad (A1.6)$$

Notons qu'il n'est pas immédiat que (S) admet une solution unique. Le paragraphe (a) montrera qu'il en est bien ainsi dès que  $k$  est de partie imaginaire suffisamment petite.

Le paragraphe (b) concerne la détermination de la décomposition multiplicative de Wiener Hopf de la fonction  $\gamma_{\varepsilon,h}$ .

$$\gamma_{\varepsilon,h}(z) = \gamma_{\varepsilon,h}^+(z) \gamma_{\varepsilon,h}^-(z)$$

Cette égalité a un équivalent continu qui s'écrit :

$$\begin{cases} \gamma_{\varepsilon}(z) &= \gamma_{\varepsilon}^+(z) \gamma_{\varepsilon}^-(z) \\ \gamma_{\varepsilon}(z) &= (k^2 - \omega^2 - i\varepsilon\omega)^{1/2} \\ \gamma_{\varepsilon}^+(z) &= (k - (\omega^2 + i\varepsilon\omega)^{1/2})^{1/2} \\ \gamma_{\varepsilon}^-(z) &= (k + (\omega^2 + i\varepsilon\omega)^{1/2})^{1/2} \end{cases}$$

Dans le paragraphe c) nous montrons, en écrivant le développement asymptotique des fonctions  $\gamma_{\varepsilon,h}^+$  et  $\gamma_{\varepsilon,h}^-$  que celles-ci sont des approximations d'ordre 1 de leurs homologues continus  $\gamma_{\varepsilon}^+$  et  $\gamma_{\varepsilon}^-$ . Ce point est remarquable, car  $\gamma_{\varepsilon,h}$  est, une approximation d'ordre 2 de  $\gamma_{\varepsilon}$ .

Le paragraphe d) concerne la détermination de la suite  $S_{\varepsilon,h}^+$  dont la transformée de Fourier discrète coïncide avec l'inverse de  $\gamma_{\varepsilon,h}^+$ . Ce résultat est utilisé dans la section 2.3 pour écrire explicitement l'opérateur  $S_{\varepsilon,h}^+$

#### b) Résultat d'existence et d'unicité des solutions de (S)

L'objet de ce paragraphe est de montrer que  $\varphi_{\varepsilon,h}(z)$  défini par A1.1, A1.2 et A1.3 est définie unique.

Pour cela, on commence par montrer qu'une condition nécessaire et suffisante d'unicité est que (A1.1) ne possède aucune solution réelle, puis nous démontrons qu'il en est bien ainsi dès que  $z$  est de partie imaginaire suffisamment petite. Plus précidément, nous montrons que tout (S) a une solution unique, au moins dans la bande :

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{\varepsilon, h} = \left\{ z \in \mathbb{C} ; -\frac{\tau_h(\varepsilon)}{h} < \operatorname{Im}(z) < \frac{\tau_h(\varepsilon)}{h} \right\} \\ \text{avec :} \\ \tau_h(\varepsilon) = \operatorname{Argsh} \left\{ \frac{\omega \varepsilon h^2}{2} \min \left[ 1, \frac{1}{|4\lambda - 3|} \right] \right\} \end{array} \right.$$

Nous commençons par énoncer le

Lemme A1.1 :

L'équation

$$\cos(z_1 h) = \cos(z_2 h)$$

a pour solution :

$$z_1 = \pm z_2 + \frac{2\pi n}{h} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

Ainsi, le système

$$\left| \begin{array}{l} \cos(z.h) = Z \quad (\text{A1.4}) \\ \operatorname{Im} z > 0 \quad \text{Réelle } z \in \left[ -\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h} \right[ \end{array} \right.$$

admet une solution unique dès que (A1.4) n'admet pas de solutions réelles.

Preuve :

Il suffit d'écrire l'égalité :

$$\cos z_1 h - \cos z_2 h = 2 \sin \frac{h}{2} (z_1 + z_2) \sin \frac{h}{2} (z_1 - z_2)$$

et de se souvenir que l'équation  $\sin(t) = 0$  est équivalente sur  $C$  à  $t = n\pi$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) pour aboutir à l'expression des solutions.

Supposons, à présent, qu'il existe deux solutions, soient  $z_1, z_2$ , à (A1.4).

Si l'on fixe leur parties réelles dans  $\left[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right]$ , on a :

$$z_1 = \pm z_2$$

De plus, si leurs parties imaginaires sont toutes deux positives,  $z_1$  ne peut être opposée à  $z_2$  que si toutes deux sont réelles. D'où l'énoncé du lemme.

Nous établissons à présent, le :

#### Lemme A1.2

Posons :

$$\tau_h(\epsilon) = \text{Argsh} \left\{ \frac{\omega \epsilon h^2}{2} \min \left[ 1, \frac{1}{|4\eta - 3|} \right] \right\}$$

Il n'existe alors aucune solution réelle  $k$  à l'équation :

$$2(a + 2b \cos zk) \cos kh = (c_h(\epsilon) + 2a \cos zh) \quad (\text{A1.7})$$

dans la bande :

$$B_{\epsilon, h} = \left\{ z \in C, \frac{-\tau_h(\epsilon)}{h} < \text{Im}z < \frac{\tau_h(\epsilon)}{h} \right\}$$

Preuve :

Soit  $z$  élément de  $B_{\epsilon, h}$ , on a :



$$|\operatorname{Im} \cos zh| \leq |\operatorname{sh} \operatorname{Im} hz| \leq -\frac{\omega \epsilon h^2}{2}$$

Supposons qu'il existe  $k$  tel que A1.7 soit satisfait, on aurait :

$$2(a + 2b \cos hk) \cos(hz) = - (c_h(\epsilon) + 2a \cos hk)$$

et donc :

$$|\operatorname{Im} \cos zh| \geq \frac{1}{2} \operatorname{Im} c_h(\epsilon) \cdot \inf_{k \in \mathbb{R}} |a + 2b \cos kh|^{-1}$$

d'où une contradiction.

Nous rassemblons ces deux résultats dans une proposition :

#### Proposition A1.1

Le système (S) défini par (A1.1), (A1.2), (A1.3) admet une solution unique dans  $B_{\epsilon, h}$ , où  $B_{\epsilon, h}$  est la bande du plan complexe définie dans le lemme A1.2.

#### b) La décomposition multiplicative de Wiener Hopf

Nous abordons dans ce paragraphe la décomposition multiplicative de la fonction  $\gamma_{\epsilon, h}(z)$  dans la bande  $B_{\epsilon, h}$  définie dans le lemme A1.2.

C'est le point technique clé de la thèse ; c'est en effet la partie la plus délicate de la méthode de Wiener Hopf (cf. [No]).

Le résultat que nous établissons peut se résumer ainsi :

$$\gamma_{\epsilon, h}(z) = \gamma_{\epsilon, h}^+(z) \gamma_{\epsilon, h}^-(z)$$

avec :

$$\begin{aligned}
\gamma_{\varepsilon,h}^+(z) &= \rho_h \exp - \left( \frac{ih}{4} \varphi_{\varepsilon,h}(0) \right) \exp - \left( \frac{ih}{4} \varphi_{\varepsilon,h} \left( \frac{\pi}{h} \right) \right) \\
&\quad \cdot (1 - \exp ih (\varphi_{\varepsilon,h}(0) - z))^{1/2} \cdot \left( 1 - \exp ih \left( \varphi_{\varepsilon,h} \left( \frac{\pi}{h} \right) - z \right) \right)^{1/2} \\
\gamma_{\varepsilon,h}^-(z) &= i\rho_h \exp - \left( \frac{ih}{4} \varphi_{\varepsilon,h}(0) \right) \exp - \left( \frac{ih}{4} \varphi_{\varepsilon,h} \left( \frac{\pi}{h} \right) \right) \\
&\quad \cdot (1 - \exp ih (\varphi_{\varepsilon,h}(0) + z))^{1/2} \cdot \left( 1 - \exp ih \left( \varphi_{\varepsilon,h} \left( \frac{\pi}{h} \right) + z \right) \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

où les racines carrées, correspondent à celles définies via la détermination principale du logarithme et où  $\rho_h$  est défini par :

$$\begin{aligned}
\rho_h &= \frac{|4\lambda - 3|^{1/4}}{(2h)^{1/2}} e^{-\frac{i\pi}{4}} & \text{si } \lambda > \frac{3}{4} \\
\rho_h &= \frac{|4\lambda - 3|^{1/4}}{(2h)^{1/2}} e^{-\frac{i\pi}{2}} & \text{si } \frac{1}{2} < \lambda < \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Pour obtenir ce résultat, on va utiliser une «astuce» consistant à travailler sur le carré de  $\gamma_{\varepsilon,h}(z)$ . L'idée étant de se débarrasser du sinus intervenant dans son expression et dont on n'a pas une représentation simple (c'est en effet le cosinus de  $h\varphi_{\varepsilon,h}(z)$  qui est donné en fonction de  $hz$ ). Nous établirons notamment que  $\gamma_{\varepsilon,h}^2(z)$  est un polynôme en  $\exp ihz$  et  $\exp -ihz$ . La décomposition devient alors évidente et s'effectue très simplement.

D'une façon plus générale, ce paragraphe est construit suivant le plan :

- 1) Montrer que  $\gamma_{\varepsilon,h}^2$  est une fonction analytique du plan complexe qu'il est facile de décomposer.
- 2) Définir, par les formules précédentes, les racines carrées de chaque fonction de la décomposition, de telle sorte que l'on ait sur  $B_{\varepsilon,h}$  :

$$\begin{cases} \tilde{\gamma}_{\epsilon,h}(z) = \gamma_{\epsilon,h}^+(z) \gamma_{\epsilon,h}^-(z) \\ \tilde{\gamma}_{\epsilon,h}^2(z) = \gamma_{\epsilon,h}^2(z) \end{cases}$$

3) Etablir que si  $\gamma_{\epsilon,h}$  et  $\gamma_{\epsilon,h}$  coïncident en un point de  $B_{\epsilon,h}$ , elles coïncident sur la totalité de cette bande.

4) Vérifier qu'elles coïncident en  $z = 0$ .

1) Calcul de  $\gamma_{\epsilon,h}^2(z)$

Remarquons que :

$$\begin{aligned} \gamma_{\epsilon,h}^2(z) &= -\frac{1}{h^2} (a + 2b \cos hz)^2 \sin^2 h \varphi_{\epsilon,h}(z) \\ \gamma_{\epsilon,h}^2(z) &= -\frac{1}{h^2} (a + 2b \cos hz)^2 + \frac{1}{h^2} (a + 2b \cos hz)^2 \cos^2 h \varphi_{\epsilon,h}(z) \end{aligned}$$

soit en utilisant la relation de dispersion que satisfait  $\varphi_{\epsilon,h}(z)$  :

$$\gamma_{\epsilon,h}^2(z) = \frac{1}{h^2} \left\{ -(a + 2b \cos hz)^2 + \frac{1}{4} (c_h(\epsilon) + 2a \cos zh)^2 \right\}$$

ou encore :

$$\begin{aligned} \gamma_{\epsilon,h}^2(z) &= \frac{1}{4h^2} \{ c_h(\epsilon) + 2a \cos zh + 2(a + 2b \cos hz) \} \\ &\quad \cdot \{ c_h(\epsilon) - 2a + 2(a - 2b) \cos hz \} \end{aligned}$$

en remarquant que :

$$\begin{cases} a + 2b = 1 \\ a - 2b = 4\lambda - 3 \end{cases}$$

ainsi que :

$$\begin{array}{l}
c_h(\epsilon) + 2a + 2a \cos zh + 4b \cos zh = 0 \\
\Leftrightarrow \cos zh = \cos(\varphi_{\epsilon,h}(0)h) \\
\\
c_h(\epsilon) - 2a + 2a \cos zh - 4b \cos zh = 0 \\
\Leftrightarrow \cos zh = \cos\left(\varphi_{\epsilon,h}\left(\frac{\pi}{h}\right)h\right)
\end{array}$$

il vient :

$$\gamma_{\epsilon,h}^2(z) = + \frac{4\lambda - 3}{h^2} (\cos zh - \cos \varphi_{\epsilon,h}(0)h) \left( \cos zh - \cos \varphi_{\epsilon,h}\left(\frac{\pi}{h}\right)h \right)$$

ou encore, en développant :

$$\begin{aligned}
\gamma_{\epsilon,h}^2(z) &= \frac{4\lambda - 3}{4h^2} \exp - ih \varphi_{\epsilon,h}(0) \exp - i h \varphi_{\epsilon,h}\left(\frac{\pi}{h}\right) \\
&\cdot \{1 - \exp - ih(z - \varphi_{\epsilon,h}(0))\} \{1 - \exp ih(z + \varphi_{\epsilon,h}(0))\} \\
&\cdot \left\{1 - \exp - ih\left(z - \varphi_{\epsilon,h}\left(\frac{\pi}{h}\right)\right)\right\} \left\{1 - \exp ih\left(z + \varphi_{\epsilon,h}\left(\frac{\pi}{h}\right)\right)\right\}
\end{aligned}$$

Remarquons que si  $z \neq \pm \varphi_{\epsilon,h}(0) + 2n\pi$

$$z \neq \pm \varphi_{\epsilon,h}\left(\frac{\pi}{h}\right) + 2n\pi$$

$z \rightarrow \gamma_{\epsilon,h}^2(z)$  est une fonction analytique non nulle ; nous pouvons donc définir sur tout ensemble simplement connexe de :

$$C \quad \left\{ \pm \varphi_{\epsilon,h}(0) + 2k\pi, \pm \varphi_{\epsilon,h}\left(\frac{\pi}{h}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

une racine carrée de cette fonction qui soit analytique sur cet ensemble.

Etudions tout d'abord celles que nous avons définies dans le lemme (2.1) c'est-à-dire celles dont les racines carrées sont construites à partir de la détermination principale du logarithme.

## 2) Etude de $\gamma_{\varepsilon,h}^+$ et $\gamma_{\varepsilon,h}^-$

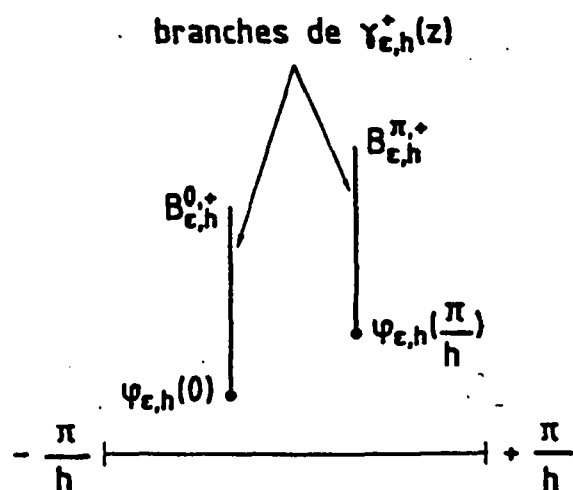
Il est facile de vérifier que pour tout  $\rho_h$  complexe :

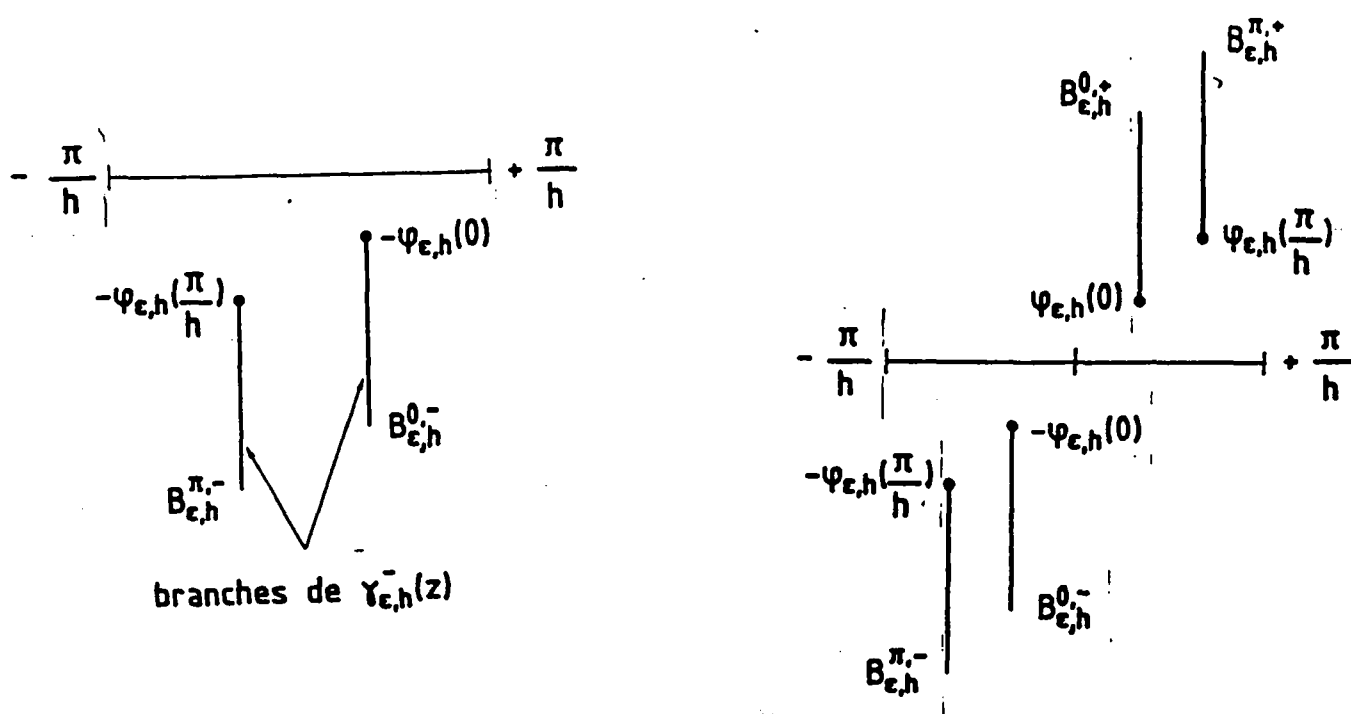
$$\gamma_{\varepsilon,h}^+(z) = \rho_h \exp -i \frac{\varphi_{\varepsilon,h}(0)h}{4} \exp -i \frac{\varphi_{\varepsilon,h}\left(\frac{\pi}{h}\right)h}{4} \cdot (1 - \exp i h (\varphi_{\varepsilon,h}(0) - z))^{1/2} \cdot \left(1 - \exp i h \left(\varphi_{\varepsilon,h}\left(\frac{\pi}{h}\right) - z\right)\right)^{1/2}$$

est définie analytique sur  $\mathbb{C}$  privé des deux familles de branches  $B_{\varepsilon,h}^{0,+}$  et  $B_{\varepsilon,h}^{\pi,+}$  :

$$B_{\varepsilon,h}^{0,+} = \left\{ z \in \mathbb{C} ; \text{Réelle } z = \text{Réelle } \varphi_{\varepsilon,h}(0) + 2 \frac{k \pi}{h} \right. \\ \left. , (k \in \mathbb{Z}) ; \text{Im } z \geq \text{Im } \varphi_{\varepsilon,h}(0) \right\}$$

$$B_{\varepsilon,h}^{\pi,+} = \left\{ z \in \mathbb{C} ; \text{Réelle } z = \text{Réelle } \varphi_{\varepsilon,h}\left(\frac{\pi}{h}\right) + \frac{2 k \pi}{h} \right. \\ \left. , (k \in \mathbb{Z}) ; \text{Im } z \geq \text{Im } \varphi_{\varepsilon,h}\left(\frac{\pi}{h}\right) \right\}$$





De même :

$$\gamma_{\epsilon,h}^-(z) = i\rho_h \exp -i \frac{h \varphi_{\epsilon,h}(0)}{4} \exp -i \frac{h \varphi_{\epsilon,h}\left(\frac{\pi}{h}\right)}{4} \cdot (1 - \exp i h (z + \varphi_{\epsilon,h}(0)))^{1/2} \cdot \left(1 - \exp i h \left(z + \varphi_{\epsilon,h}\left(\frac{\pi}{h}\right)\right)\right)^{1/2}$$

est définie analytique sur  $\mathbb{C}$  privé des deux familles de branches  $B_{\epsilon,h}^{0,-}$  et  $B_{\epsilon,h}^{\pi,-}$  :

$$B_{\epsilon,h}^{0,-} = \left\{ z \in \mathbb{C} ; \text{Réelle } z = -\text{Réelle } \varphi_{\epsilon,h}(0) + \frac{2k\pi}{h} \right. \\ \left. , (k \in \mathbb{Z}) ; \text{Im } z \leq -\text{Im } \varphi_{\epsilon,h}(0) \right\}$$

$$B_{\epsilon,h}^{\pi,-} = \left\{ z \in \mathbb{C} ; \text{Réelle } z = -\text{Réelle } \varphi_{\epsilon,h}\left(\frac{\pi}{h}\right) + \frac{2k\pi}{h} \right. \\ \left. , (k \in \mathbb{Z}) ; \text{Im } z \leq -\text{Im } \varphi_{\epsilon,h}\left(\frac{\pi}{h}\right) \right\}$$

De plus on peut remarquer les comportements asymptotiques :

$$\gamma_{\varepsilon,h}^+(z) \sim \rho_h \exp -ih \left[ \frac{\varphi_{\varepsilon,h}(0) + \varphi_{\varepsilon,h}\left(\frac{\pi}{h}\right)}{4} \right], \quad \text{Im} z \rightarrow -\infty$$

$$\gamma_{\varepsilon,h}^-(z) \sim i\rho_h \exp -ih \left[ \frac{\varphi_{\varepsilon,h}(0) + \varphi_{\varepsilon,h}\left(\frac{\pi}{h}\right)}{4} \right], \quad \text{Im} z \rightarrow +\infty$$

Nous avons alors tous les éléments pour définir :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\gamma}_{\varepsilon,h} : \mathbb{C} \setminus \left( B_{\varepsilon,h}^{0,+} \cup B_{\varepsilon,h}^{\pi,+} \cup B_{\varepsilon,h}^{0,-} \cup B_{\varepsilon,h}^{\pi,-} \right) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \gamma_{\varepsilon,h}^+(z) \gamma_{\varepsilon,h}^-(z) \end{array}$$

$\tilde{\gamma}_{\varepsilon,h}$  est alors analytique sur son domaine et vérifie :

$$\tilde{\gamma}_{\varepsilon,h}^2(z) = \gamma_{\varepsilon,h}^2(z)$$

dès que  $\rho_h$  est choisi tel que :

$$\rho_h^4 = - \frac{(4\lambda - 3)}{4h^2}$$

Notons d'autre part que le domaine de  $\gamma_{\varepsilon,h}$  contient  $B_{\varepsilon,h}$  ; en effet, dans le cas contraire, certaines branches de  $\gamma_{\varepsilon,h}$  seraient intérieures à cette bande, soit :

$$\pm \varphi_{\varepsilon,h}(0) \in B_{\varepsilon,h} \quad \text{ou} \quad \pm \varphi_{\varepsilon,h}\left(\frac{\pi}{h}\right) \in B_{\varepsilon,h}$$

et l'équation (A1.1) admettrait une solution réelle  $\left( \text{à savoir } 0 \text{ ou } \frac{\pi}{h} \right)$ ,  
ce qui ne peut être d'après la proposition A1.

Finalement, pour chaque  $z$  de  $B_{\varepsilon,h}$  on a :

$$\text{soit } \tilde{\gamma}_{\varepsilon,h}(z) = \gamma_{\varepsilon,h}(z)$$

$$\text{soit } \tilde{\gamma}_{\varepsilon,h}(z) = -\gamma_{\varepsilon,h}(z)$$

Nous allons montrer que pour discriminer ces deux hypothèses, il suffit de ramener à l'étude d'un seul point, c'est l'objet de la :

### 3) Proposition A2

S'il existe un point  $z_1$  de  $B_{\varepsilon,h}$  tel que :

$$\tilde{\gamma}_{\varepsilon,h}(z_1) = \gamma_{\varepsilon,h}(z_1)$$

alors, pour tout  $z$  de  $B_{\varepsilon,h}$  on a :

$$\tilde{\gamma}_{\varepsilon,h}(z) = \gamma_{\varepsilon,h}(z)$$

### Preuve

Soient  $z_1, z_2$  deux éléments de  $B_{\varepsilon,h}$  tels que :

$$\begin{cases} \tilde{\gamma}_{\varepsilon,h}(z_1) = \gamma_{\varepsilon,h}(z_1) \\ \tilde{\gamma}_{\varepsilon,h}(z_2) = -\gamma_{\varepsilon,h}(z_2) \end{cases}$$



construisons la fonction :

$$H(z) = \frac{-(c_h(\epsilon) + 2a \cos hz) + 2h \tilde{\gamma}_{\epsilon,h}(z)}{2(a + 2b \cos hz)}$$

on a :

$$\begin{cases} H(z_1) = \exp - i h \varphi_{\epsilon,h}(z_1) \\ H(z_2) = \exp + i h \varphi_{\epsilon,h}(z_2) \end{cases}$$

et donc :

$$|H(z_1)| > 1 > |H(z_2)|$$

Joignons le point  $z_1$  au point  $z_2$  par une ligne continue  $\Gamma$  dans  $B_{\epsilon,h}$  en évitant les zéros de  $(a + 2b \cos hz)$  ; la fonction  $g : z \rightarrow |H(z)|$  est alors continue sur  $\Gamma$  et comme  $g(z_1) < 1$ ,  $g(z_2) > 1$ , le théorème des valeurs intermédiaires implique l'existence d'un point  $z_3$  de  $\Gamma$  tel que  $g(z_3) = 1$ , ce qui d'après la proposition A1 ne peut être sur  $B_{\epsilon,h}$ .

Pour conclure, il ne nous reste plus qu'à effectuer un calcul en un point de  $B_{\epsilon,h}$  ; soit par exemple un :

#### 4) Calcul en $z = 0$

Un calcul élémentaire montre que :

$$\tilde{\gamma}_{\epsilon,h}(0) = -4i \rho_h^2 \sin \left[ \frac{h \varphi_{\epsilon,h}(0)}{2} \right] \sin \left[ \frac{h \varphi_{\epsilon,h} \left( \frac{\pi}{h} \right)}{2} \right] \quad (A1.8)$$

Comme d'autre part :

$$c_h(\epsilon) + 2a + 2 \cos h \varphi_{\epsilon,h}(0) = 0$$

$$c_h(\epsilon) - 2a + 2(a - 2b) \cos h \varphi_{\epsilon,h} \left( \frac{\pi}{h} \right) = 0$$

On obtient par différence :

$$2a + \left[ -1 + 2 \cos^2 \left[ \frac{h \varphi_{\varepsilon,h}(0)}{2} \right] \right] - (a - 2b) \left[ 1 - 2 \sin^2 \left[ \frac{h \varphi_{\varepsilon,h} \left( \frac{\pi}{h} \right)}{2} \right] \right] = 0$$

$$\text{soit } \cos^2 \frac{h \varphi_{\varepsilon,h}(0)}{2} = -(4\lambda - 3) \sin^2 \frac{h \varphi_{\varepsilon,h} \left( \frac{\pi}{h} \right)}{2}$$

Et donc :

$$\text{Si } 4\lambda - 3 > 0 \quad \cos \left[ \frac{h \varphi_{\varepsilon,h}(0)}{2} \right] = \pm i(4\lambda - 3)^{1/2} \sin \left[ \frac{h \varphi_{\varepsilon,h} \left( \frac{\pi}{h} \right)}{2} \right]$$

$$\text{Si } 4\lambda - 3 < 0 \quad \cos \left[ \frac{h \varphi_{\varepsilon,h}(0)}{2} \right] = \pm (3 - 4\lambda)^{1/2} \sin \left[ \frac{h \varphi_{\varepsilon,h} \left( \frac{\pi}{h} \right)}{2} \right]$$

Pour déterminer le signe dans l'expression ci-dessous, nous établissons le :

#### Lemme A1.3

Si  $\gamma_{\varepsilon,h}(z)$  est défini par (A.1), (A.2), (A.3) on a :

Si  $4\lambda - 3 > 0$

$$\text{Réelle } \varphi_{\varepsilon,h}(0) \quad \text{et} \quad \text{Réelle } \varphi_{\varepsilon,h} \left( \frac{\pi}{h} \right) \in \left[ 0, \frac{\pi}{h} \right]$$

Si  $4\lambda - 3 < 0$

$$\text{Réelle } \varphi_{\varepsilon,h}(0) \quad \text{et} \quad \text{-Réelle } \varphi_{\varepsilon,h} \left( \frac{\pi}{h} \right) \in \left[ 0, \frac{\pi}{h} \right]$$

Preuve :

On a :

$$c_h(\varepsilon) + 2a + 2 \cos [h \varphi_{\varepsilon,h}(0)] = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{Im} [\cos (h \varphi_{\varepsilon,h}(0))] = -\frac{\operatorname{Im} c_h(\varepsilon)}{2} = \frac{-\varepsilon \omega h^2}{2} < 0$$

Ecrivons :

$$h \varphi_{\varepsilon,h}(0) = a_r + ia_i$$

On a :

$$\cos h \varphi_{\varepsilon,h}(0) = \cos a_r \operatorname{cha}_i - i \operatorname{sha}_i \sin a_r$$

L'hypothèse A.2 implique que :

$$a_i > 0 \Rightarrow \operatorname{sh} a_i > 0$$

Et donc :

$$\sin a_r > 0 \quad \text{d'où le premier résultat.}$$

De même :

$$c_h(\varepsilon) - 2a + 2(a - 2b) \cos \left[ h \varphi_{\varepsilon,h} \left( \frac{\pi}{h} \right) \right] = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{Im} \cos h \varphi_{\varepsilon,h} \left( \frac{\pi}{h} \right) \text{ du signe de } -(a - 2b) = 3 - 4\lambda$$

Et on en conclut de la même manière que ci-dessus.

Le lemme étant montré, revenons au calcul en  $z = 0$  et distinguons 2 cas :

i)  $4\lambda - 3 > 0$  on a alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < \text{Réelle} \frac{\varphi_{\varepsilon,h}(0)}{2}, \text{ Réelle} \frac{\varphi_{\varepsilon,h}\left(\frac{\pi}{h}\right)}{2} < \frac{\pi}{2h} \\ 0 < \text{Im} \frac{\varphi_{\varepsilon,h}(0)}{2}, \text{ Im} \frac{\varphi_{\varepsilon,h}\left(\frac{\pi}{h}\right)}{2} \\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 < \text{Réelle} \left[ \sin \left[ \frac{h \varphi_{\varepsilon,h}\left(\frac{\pi}{h}\right)}{2} \right] \right], 0 < \text{Im} \left[ \sin \left[ \frac{h \varphi_{\varepsilon,h}\left(\frac{\pi}{h}\right)}{2} \right] \right] \\ 0 > \text{Im} \left[ \cos \left[ \frac{h \varphi_{\varepsilon,h}(0)}{2} \right] \right], 0 < \text{Réelle} \left[ \cos \left[ \frac{h \varphi_{\varepsilon,h}\left(\frac{\pi}{h}\right)}{2} \right] \right] \end{array} \right. \end{array} \right.$$

et donc :

$$\cos \left[ \frac{h \varphi_{\varepsilon,h}(0)}{2} \right] = -i |4\lambda - 3|^{1/2} \sin \left[ \frac{h \varphi_{\varepsilon,h}\left(\frac{\pi}{h}\right)}{2} \right] \quad (\text{A1.9})$$

Injectons (A1.9) dans (A1.8) il vient :

$$\tilde{\gamma}_{\varepsilon,h}(0) = + 4\rho_h^2 |4\lambda - 3|^{-1/2} \cos \left[ \frac{h \varphi_{\varepsilon,h}(0)}{2} \right] \sin \left[ \frac{h \varphi_{\varepsilon,h}\left(\frac{\pi}{h}\right)}{2} \right]$$

Or, on a :

$$\gamma_{\varepsilon,h}(0) = -\frac{i}{h} \sin [h \varphi_{\varepsilon,h}(0)]$$

d'où la relation :

$$\tilde{\gamma}_{\varepsilon,h}(0) = \frac{2\rho_h^2 h i}{|4\lambda - 3|^{1/2}} \gamma_{\varepsilon,h}(0)$$

Le bon choix de  $\rho_h$  est alors donné par :

$$\rho_h = |4\lambda - 3|^{1/4} \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2h}}$$

ii)  $4\lambda - 3 < 0$  , on a alors :

$$\begin{cases} 0 < \text{Réelle} \frac{h \varphi_{\varepsilon,h}(0)}{2} , & -\text{Réelle} \frac{h \varphi_{\varepsilon,h}\left(\frac{\pi}{h}\right)}{2} < \frac{\pi}{2} \\ 0 < \text{Im} \frac{h \varphi_{\varepsilon,h}(0)}{2} , & \text{Im} \frac{h \varphi_{\varepsilon,h}\left(\frac{\pi}{h}\right)}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 > \text{Réelle} \left[ \sin \frac{h \varphi_{\varepsilon,h}\left(\frac{\pi}{h}\right)}{2} \right] & 0 < \text{Im} \left[ \sin \frac{h \varphi_{\varepsilon,h}\left(\frac{\pi}{h}\right)}{2} \right] \\ 0 < \text{Réelle} \left[ \cos \frac{h \varphi_{\varepsilon,h}(0)}{2} \right] & 0 > \text{Im} \left[ \cos \frac{h \varphi_{\varepsilon,h}(0)}{2} \right] \end{cases}$$

et donc :

$$\cos \left[ \frac{h \varphi_{\varepsilon,h}(0)}{2} \right] = -(3 - 4\lambda)^{1/2} \sin \frac{h \varphi_{\varepsilon,h}\left(\frac{\pi}{h}\right)}{2} \quad (\text{A1.10})$$

Injectons (A1.10) dans (A1.8) , il vient :

$$\tilde{\gamma}_{\varepsilon,h}(0) = 4i \rho_h^2 |3 - 4\lambda|^{-1/2} \cos \frac{h \varphi_{\varepsilon,h}(0)}{2} \sin \frac{h \varphi_{\varepsilon,h}\left(\frac{\pi}{h}\right)}{2}$$

ou bien :

$$\tilde{\gamma}_{\varepsilon,h}(0) = \frac{-2 \rho_h^2 h}{|3 - 4\lambda|^{1/2}} \varphi_{\varepsilon,h}(0)$$

d'où le bon choix :

$$\rho_h = -|3-4\lambda|^{1/4} \frac{i}{\sqrt{2h}}$$

c) Etude du comportement, lorsque  $h$  tend vers 0, des fonctions  $\gamma_{\varepsilon,h}^+$  et  $\gamma_{\varepsilon,h}$  sur l'axe réel

Nous nous proposons de calculer les développements asymptotiques des fonctions  $\gamma_{\varepsilon,h}^+$  et  $\gamma_{\varepsilon,h}$  lorsque le pas d'espace  $h$  tend vers 0.

Rappelons que ces fonctions sont données par les expressions :

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{\varepsilon,h}^+(z) = \rho_h \exp - \left( \frac{ih}{4} \varphi_{\varepsilon,h}(0) \right) \exp - \left( \frac{ih}{4} \varphi_{\varepsilon,h} \left( \frac{\pi}{h} \right) \right) \\ \quad \cdot (1 - \exp ih (\varphi_{\varepsilon,h}(0) - z))^{1/2} \left( 1 - \exp ih \left( \varphi_{\varepsilon,h} \left( \frac{\pi}{h} \right) - z \right) \right)^{1/2} \\ \gamma_{\varepsilon,h}^-(z) = i\rho_h \exp - \left( \frac{ih}{4} \varphi_{\varepsilon,h}(0) \right) \exp - \left( \frac{ih}{4} \varphi_{\varepsilon,h} \left( \frac{\pi}{h} \right) \right) \\ \quad \cdot (1 - \exp ih (\varphi_{\varepsilon,h}(0) + z))^{1/2} \left( 1 - \exp ih \left( \varphi_{\varepsilon,h} \left( \frac{\pi}{h} \right) + z \right) \right)^{1/2} \end{array} \right.$$

avec :

$$\rho_h = \frac{|4\lambda - 3|^{1/4}}{(2h)^{1/2}} e^{-\frac{i\pi}{4}} \quad \text{si } \lambda > \frac{3}{4}$$

$$\rho_h = \frac{|4\lambda - 3|^{1/4}}{(2h)^{1/2}} e^{-\frac{i\pi}{2}} \quad \text{si } \frac{1}{2} < \lambda < \frac{3}{4}$$

Le résultat que nous allons établir peut s'exprimer à travers la proposition suivante :

## Proposition A1.2

On a les développements asymptotiques suivants :

$$\gamma_{\varepsilon,h}^+(z) = \gamma_{\varepsilon}^+(z) \left[ 1 - i h z \left( \frac{1}{4} - \frac{\zeta}{2(1-\zeta)} \right) + o(h^2) \right]$$

$$\gamma_{\varepsilon,h}^-(z) = \gamma_{\varepsilon}^-(z) \left[ 1 + i h z \left( \frac{1}{4} - \frac{\zeta}{2(1-\zeta)} \right) + o(h^2) \right]$$

$$\text{avec } \zeta = \lim_{h \rightarrow 0} \exp i h \varphi_{\varepsilon,h} \left( \frac{\pi}{h} \right)$$

$$\text{soit } \zeta = \operatorname{sgn} (4\lambda - 3) \left[ \left| \frac{4\lambda - 1}{4\lambda - 3} \right| - \left[ \left( \frac{4\lambda - 1}{4\lambda - 3} \right)^2 - 1 \right]^{1/2} \right]$$

On remarquera que, bien que  $\gamma_{\varepsilon,h}$  soit une approximation d'ordre 2 de  $\gamma_{\varepsilon}$ , les termes de la décomposition multiplicative de Wiener Hopf  $\gamma_{\varepsilon,h}^+$  et  $\gamma_{\varepsilon,h}^-$  sont, en général, des approximations d'ordre 1 des termes correspondants en continu ( $\gamma_{\varepsilon}^+$  et  $\gamma_{\varepsilon}^-$ ).

Dans l'expression des  $\gamma_{\varepsilon,h}^{\pm}$  interviennent les deux familles de nombre, indicées par  $h$  :

$$\begin{cases} \varphi_{\varepsilon,h}(0) \\ \varphi_{\varepsilon,h}\left(\frac{\pi}{h}\right) \end{cases}$$

Nous commençons par étudier les expressions limites de ces deux suites. Nous montrons notamment que les expressions limites sont atteintes en  $O(h^2)$ . Puis, nous effectuons des développements de Taylor sur les expressions des fonctions étudiées, pour aboutir au résultat recherché.

Remarque : en utilisant les propriétés :

$$\begin{cases} \gamma_{\varepsilon,h}^-(z) = +i \gamma_{\varepsilon,h}^+(-z) \\ \gamma_{\varepsilon}^-(z) = +i \gamma_{\varepsilon}^+(-z) \end{cases} \quad \text{si } z \in \mathbb{R}$$

on est ramené à étudier uniquement le cas de  $\gamma_{\varepsilon,h}^+(z)$ .

1) Etude de  $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi_{\varepsilon,h}(0)$

On a :

$$\begin{cases} \cos [h \varphi_{\varepsilon,h}(0)] = 1 - \frac{h^2}{2} (\omega^2 + i\varepsilon\omega) \\ \operatorname{Im} \varphi_{\varepsilon,h}(0) > 0 \quad ; \quad \varphi_{\varepsilon,h}(0) \in \left[ -\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h} \right] \end{cases}$$

ce qui implique :

$$1 - \frac{h^2}{2} \varphi_{\varepsilon,h}^2(0) (1 + 0(h^2)) = 1 - \frac{h^2}{2} (\omega^2 + i\varepsilon\omega)$$

et donc :

$$\varphi_{\varepsilon,h}^2(0) = (\omega^2 + i\varepsilon\omega) (1 + 0(h^2))$$

On conclut, en prenant la racine carrée de partie imaginaire positive de chaque membre de l'égalité :

$$\varphi_{\varepsilon,h}(0) = (\omega^2 + i\varepsilon\omega)^{1/2} (1 + 0(h^2))$$

ce qui s'écrit encore :

$$\varphi_{\varepsilon,h}(0) = k_{\varepsilon}^{1/2} (1 + 0(h^2))$$



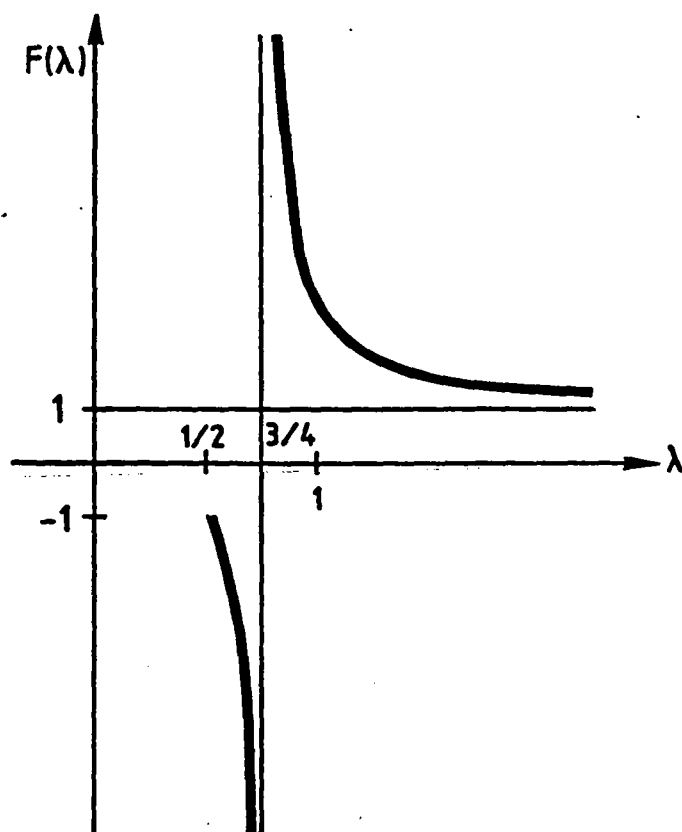
2) Etude de  $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi_{\varepsilon, h} \left( \frac{\pi}{h} \right)$

On a :

$$\begin{cases} \cosh \varphi_{\varepsilon, h} \left( \frac{\pi}{h} \right) = \frac{4\lambda - 1 - i \frac{h^2}{2} (\omega^2 + i\varepsilon\omega)}{(4\lambda - 3)} \\ \operatorname{Im} \varphi_{\varepsilon, h} \left( \frac{\pi}{h} \right) > 0 \quad \varphi_{\varepsilon, h} \in \left[ -\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h} \right] \end{cases}$$

et donc :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \cosh \varphi_{\varepsilon, h} \left( \frac{\pi}{h} \right) = \frac{4\lambda - 1}{4\lambda - 3} = F(\lambda)$$



On remarque que l'expression limite est toujours de module supérieur à 1 sur l'intervalle  $\left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$  (cf. figure ci-dessus).

On en déduit que  $\varphi_{\varepsilon, h} \left( \frac{\pi}{h} \right)$  tend vers une limite appartenant à l'ensemble

$$i\mathbb{R}^+ \text{ ou bien } -\frac{\pi}{h} + i\mathbb{R}^+ \text{ ou bien } \frac{\pi}{h} + i\mathbb{R}^+$$

Clarifions ce point en distinguant deux cas :

$$\underline{4\lambda - 3 > 0}$$

On a alors les implications :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \cosh \varphi_{\varepsilon, h} \left( \frac{\pi}{h} \right) \in [1, +\infty[ \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} h \varphi_{\varepsilon, h} \left( \frac{\pi}{h} \right) \in i\mathbb{R}^+$$

$$\underline{4\lambda - 3 < 0}$$

On a dans ce cas :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \cosh \varphi_{\varepsilon, h} \left( \frac{\pi}{h} \right) \in ]-\infty, -1[ \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} h \varphi_{\varepsilon, h} \left( \frac{\pi}{h} \right) \in \pm \pi + i\mathbb{R}^+$$

(en fait, en utilisant la proposition A1.3) on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} h \varphi_{\varepsilon, h} \left( \frac{\pi}{h} \right) \in -\pi + i\mathbb{R}^+$$

Quoi qu'il en soit, on a toujours :

$$\text{si } \zeta = \lim_{h \rightarrow 0} \exp i h \varphi_{\varepsilon, h} \left( \frac{\pi}{h} \right)$$

$$\begin{cases} \zeta = \operatorname{sgn} (4\lambda - 3) \left\{ \left| \frac{4\lambda - 1}{4\lambda - 3} \right| - \left[ \left( \frac{4\lambda - 1}{4\lambda - 3} \right)^2 - 1 \right]^{1/2} \right\} \\ \exp i h \varphi_{\varepsilon, h} \left( \frac{\pi}{h} \right) = \zeta (1 + o(h^2)) \end{cases}$$

2) Développement de Taylor de  $\gamma_{\varepsilon, h}^+(z)$

D'après ce qui précède on peut substituer aux expressions  $\varphi_{\varepsilon, h}(0)$  et  $\varphi_{\varepsilon, h} \left( \frac{\pi}{h} \right)$  leurs expressions limites sans faire d'erreur supérieure à un  $o(h^2)$ .

On a alors :

$$\begin{aligned} \gamma_{\varepsilon, h}^+(z) &= \rho_h (1 - \exp i (k_\varepsilon - z)h)^{1/2} (1 - \zeta \exp - i h z)^{1/2} \\ &\quad \cdot \exp - i \frac{h k_\varepsilon}{4} \zeta^{-1/4} (1 + o(h^2)) \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned} \gamma_{\varepsilon, h}^+(z) &= \rho_h \left( 1 - (1 + i h (k_\varepsilon - z) + \frac{i^2 h^2}{2} (k_\varepsilon - z)^2)^{1/2} \right. \\ &\quad \left. \cdot (1 - \zeta + i h \zeta z)^{1/2} \cdot \left( 1 - \frac{i h k_\varepsilon}{4} \right) \zeta^{-1/4} (1 + o(h^2)) \right) \end{aligned}$$

ou :

$$\begin{aligned} \gamma_{\varepsilon, h}^+(z) &= \rho_h h^{1/2} (i(-k_\varepsilon + z))^{1/2} \left( 1 + \frac{i h}{4} (k_\varepsilon - z) \right) \\ &\quad (1 - \zeta)^{1/2} \left( 1 + \frac{i h \zeta}{(1 - \zeta)} z \right) \zeta^{-1/4} \left( 1 - \frac{i h k_\varepsilon}{4} \right) \end{aligned}$$

Admettons que l'on ait :

$$A_h = e^{i\frac{\pi}{4}} \rho_h h^{1/2} \zeta^{-1/4} (1-\zeta)^{1/2} = 1$$

Comme d'autre part :

$$(i(z - k_\varepsilon))^{1/2} = e^{i\pi/4} (z - k_\varepsilon)^{1/2}, \text{ pour tout } z \text{ réel}$$

on a alors :

$$\gamma_{\varepsilon,h}^+(z) = (z - k_\varepsilon)^{1/2} \left( 1 - i h z \left( \frac{1}{4} - \frac{\zeta}{2(1-\zeta)} \right) + o(h^2) \right)$$

ce qui est le résultat recherché.

$$3) A_h = 1$$

C'est le dernier point qu'il nous reste à montrer.

Nous partons de l'égalité :

$$A_h^4 = e^{i\pi} \rho_h^4 h^2 \zeta^{-1} (1-\zeta)^2 = \frac{4\lambda-3}{4h^2} h^2 \left( -2 + \zeta + \frac{1}{\zeta} \right)$$

or :

$$\left( -2 + \zeta + \frac{1}{\zeta} \right) = 2 \left( -1 + \frac{4\lambda-1}{4\lambda-3} \right) = \frac{4}{4\lambda-3}$$

d'où :

$$A_h^4 = 1 \Rightarrow A_h = \exp \frac{i m \pi}{4} \quad m \in \mathbb{Z}$$

Pour déterminer la bonne racine quatrième distinguons deux cas :

$$\underline{4\lambda - 3 > 0}$$

On a alors :  $\zeta \in ]0,1[$  et  $(1-\zeta) \in ]0,1[$

$$\Rightarrow \zeta^{-1/4} (1-\zeta)^{1/2} \in \mathbb{R}^+$$

$$\Rightarrow A_h \in e^{i\frac{\pi}{4}} \rho_h \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^+ \Rightarrow A_h = 1$$

$$\underline{4\lambda - 3 < 0}$$

On a alors :  $\zeta \in ]-1,0[$  et  $(1-\zeta) \in ]1,2[$

$$\Rightarrow \zeta^{-1/4} (1-\zeta)^{1/2} \in e^{i\frac{\pi}{4}} ]0, +\infty[$$

$$\Rightarrow A_h \in e^{i\frac{\pi}{2}} \rho_h \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^+ \Rightarrow A_h = 1$$

d) Calcul des opérateurs  $S_{\varepsilon,h}^+, S_{\varepsilon,h}^-$

L'objet de ce paragraphe est de donner une expression littérale des opérateurs  $S_{\varepsilon,h}^+$  et  $S_{\varepsilon,h}^-$ . Rappelons que nous les avons définis par les diagrammes :

$$\begin{array}{ccc}
 S_{\varepsilon,h}^+ : L^2(\mathbb{R}_h) & \xrightarrow{\quad} & L^2(\mathbb{R}_h) \\
 u_h & \xrightarrow{\quad} & S_{\varepsilon,h}^+ u_h \\
 \downarrow F & & \uparrow F^{-1} \\
 L^2\left(-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right) & \xrightarrow{\quad} & L^2\left(-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right) \\
 \hat{u}_h(k) & \xrightarrow{\quad} & S_{\varepsilon,h}^+ \cdot \hat{u}_h(k) = \frac{\hat{u}_h(k)}{\gamma_{\varepsilon,h}^+(k)}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
S_{\varepsilon,h}^- : L^2(\mathbb{R}_h) & \longrightarrow & L^2(\mathbb{R}_h) \\
\downarrow F & \begin{array}{c} u_h \longrightarrow S_{\varepsilon,h}^- u_h \\ \uparrow F^{-1} \end{array} & \\
L^2\left(-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right) & \longrightarrow & L^2\left(-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right) \\
\hat{u}_h(k) & \longrightarrow & S_{\varepsilon,h}^- \cdot \hat{u}_h(k) = \frac{\hat{u}_h(k)}{\gamma_{\varepsilon,h}^-(k)}
\end{array}$$

$\gamma_{\varepsilon,h}^+$  et  $\gamma_{\varepsilon,h}^-$  sont des fonctions de la décomposition de Wiener Hopf multiplicative dont nous avons longuement étudié les propriétés précédemment.

L'action de ces deux opérateurs transportés dans le domaine de Fourier étant une simple multiplication par une fonction, il est clair que  $S_{\varepsilon,h}^+$  et  $S_{\varepsilon,h}^-$  sont des opérateurs de convolutions. Leurs propriétés, de causalité pour  $S_{\varepsilon,h}^+$  et d'anticausalité pour  $S_{\varepsilon,h}^-$  (cf. corollaire 2.1), se transmettent aux fonctions de convolution qui les représentent. On a donc :

$$\left| \begin{array}{l} (S_{\varepsilon,h}^+ u_h)(x_p = ph) = h \sum_{q=0}^{+\infty} S_{\varepsilon,h}^+(x_q = qh) u_h(x_p - x_q = (p-q)h) \\ (S_{\varepsilon,h}^- u_h)(x_p = ph) = h \sum_{q=-\infty}^0 S_{\varepsilon,h}^-(x_q = qh) u_h(x_p - x_q = (p-q)h) \end{array} \right.$$

On a confondu, par abus de notation, l'opérateur et la fonction de convolution qui lui est associée.

Tout le travail va donc consister à calculer la transformée de Fourier :

$$\text{de } \frac{1}{\gamma_{\varepsilon,h}^+}(k) \quad \text{pour } S_{\varepsilon,h}^+$$

$$\text{de } \frac{1}{\gamma_{\varepsilon,h}^{\pm}}(k) \quad \text{pour } S_{\varepsilon,h}^{\pm}$$

On peut écrire l'expression de chacun de ces fonctions sous la forme :

$$\frac{1}{\gamma_{\varepsilon,h}^{+}(k)} = c_h [1 - \exp i h (\varphi_{\varepsilon,h}(0) - k)]^{-1/2} \left[ 1 - \exp i h \left( \varphi_{\varepsilon,h} \left( \frac{\pi}{h} \right) - k \right) \right]^{-1/2}$$

$$\frac{1}{\gamma_{\varepsilon,h}^{-}(k)} = c_h [1 - \exp i h (\varphi_{\varepsilon,h}(0) + k)]^{-1/2} [1 - \exp i h (\varphi_{\varepsilon,h}(0) + k)]^{1/2}$$

$$c_h = \exp \left( \frac{i h}{4} \varphi_{\varepsilon,h}(0) \right) \exp \left( \frac{i h}{4} \varphi_{\varepsilon,h} \left( \frac{\pi}{h} \right) \right) (2h)^{1/2} (4\lambda - 3)^{-1/4} \exp \frac{i\pi}{4}$$

$$(4\lambda - 3)^{-1/4} = \begin{cases} |4\lambda - 3|^{-1/4} & \text{si } \lambda > \frac{3}{4} \\ e^{\frac{i\pi}{4}} |4\lambda - 3|^{-1/4} & \text{si } \lambda < \frac{3}{4} \end{cases}$$

Ainsi, on voit facilement que  $\gamma_{\varepsilon,h}^{\pm}$  est, à une constante près, donnée comme le produit de deux fonctions du type :

$$k \rightarrow (1 - \exp + i (a \pm k))^{-1/2}$$

avec :

$$a = \varphi_{\varepsilon,h}(0) \quad \text{ou} \quad \varphi_{\varepsilon,h} \left( \frac{\pi}{h} \right)$$

Dans un premier sous-paragraphe, nous donnerons la transformée de Fourier de cette fonction. Puis nous utiliserons l'équivalence entre transformée de Fourier inverse d'un produit de fonction et convolution des transformées pour écrire une première expression de  $S_{\varepsilon,h}^{+}$  et  $S_{\varepsilon,h}^{-}$  sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{\varepsilon,h}^+(ph) = \frac{c_h}{(2\pi)^{1/2}} h \sum_{q=0}^p s_{\varepsilon,h}^{+0}(qh) s_{\varepsilon,h}^{+\pi}(ph - qh) \quad \text{si } p \geq 0 \\ S_{\varepsilon,h}^+(ph) = 0 \quad \text{si } p < 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{\varepsilon,h}^-(ph) = \frac{-i c_h}{(2\pi)^{1/2}} h \sum_{q=p}^0 s_{\varepsilon,h}^{-0}(qh) s_{\varepsilon,h}^{-\pi}(ph - qh) \quad \text{si } p \leq 0 \\ S_{\varepsilon,h}^-(ph) = 0 \quad \text{si } p > 0 \end{array} \right.$$

Soit, sous forme condensée :

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{\varepsilon,h}^+ = \frac{c_h}{(2\pi)^{1/2}} s_{\varepsilon,h}^{+0} * s_{\varepsilon,h}^{+\pi} \\ S_{\varepsilon,h}^- = -i \frac{c_h}{(2\pi)^{1/2}} s_{\varepsilon,h}^{-0} * s_{\varepsilon,h}^{-\pi} \end{array} \right.$$

avec :

$$\left| \begin{array}{l} s_{\varepsilon,h}^{+0}(ph) = + s_{\varepsilon,h}^{-0}(-ph) = I_p(\varphi_{\varepsilon,h}(0)) \\ s_{\varepsilon,h}^{+\pi}(ph) = + s_{\varepsilon,h}^{-\pi}(-ph) = I_p\left(\varphi_{\varepsilon,h}\left(\frac{\pi}{h}\right)\right) \\ \text{et } I_p(a) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} \frac{\exp + iphk \, dk}{(1 - \exp + ih(a - k))^{1/2}} \end{array} \right.$$

Ce résultat n'est pas satisfaisant d'un point de vue asymptotique. Nous en donnerons un autre qui n'en diffère que de par le changement de la pondération portant sur chacune des fonctions intervenant dans la convolution.



Nous obtiendrons alors l'expression donnée dans la proposition 2.2.

### Calcul de $I_p(a)$

Nous établissons le

#### Lemme A1.4

$$\text{si } I_p(a) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} \frac{\exp + iphk \, dk}{(1 - \exp ih(a - k))^{1/2}}$$

et  $\text{Im}(a) > 0$ , alors on a :

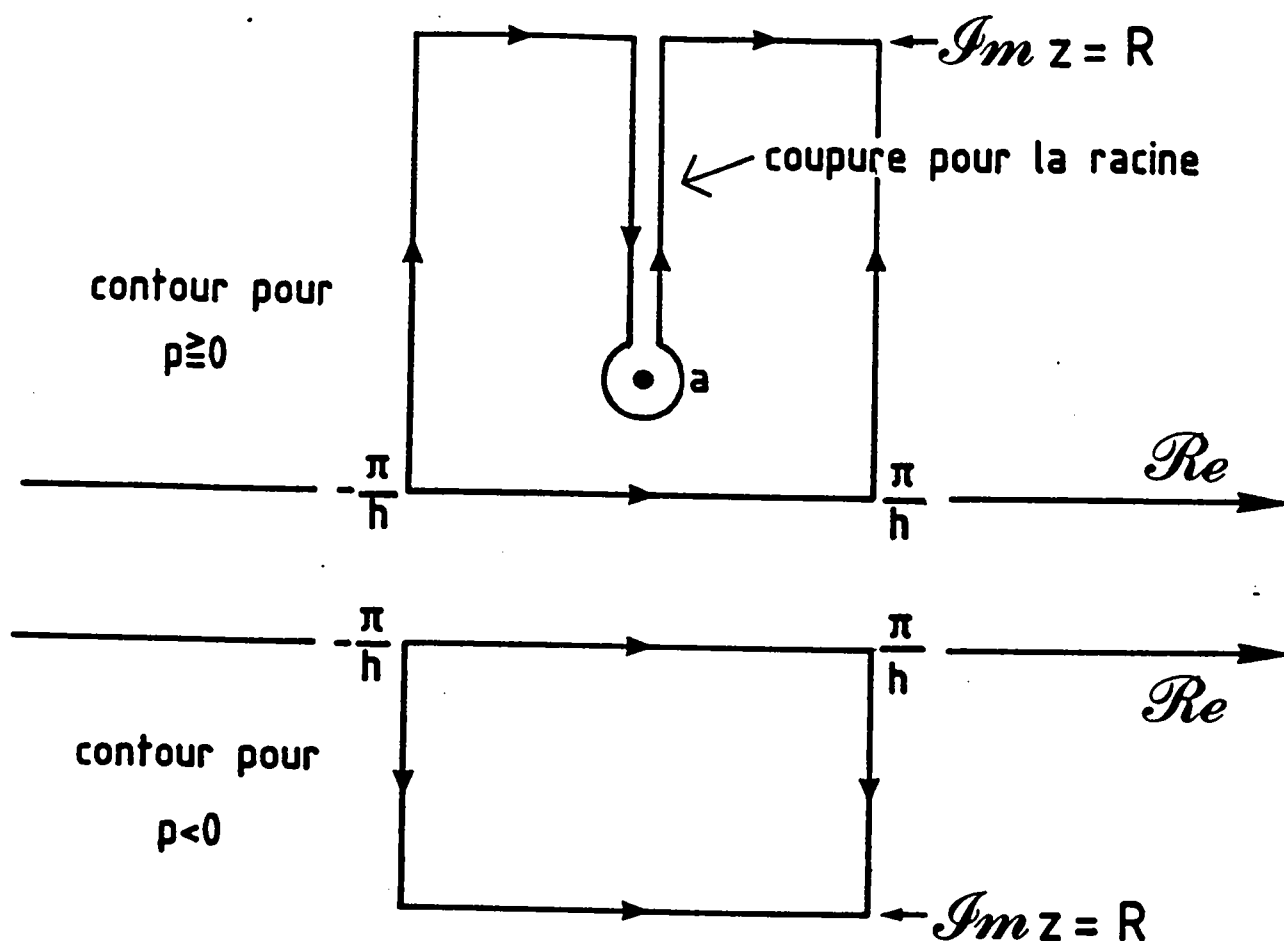
$$\begin{cases} I_p(a) = \frac{\sqrt{2}}{h} \exp ipha \frac{\Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(p+1)} & \text{si } p \geq 0 \\ I_p(a) = 0 & \text{si } p < 0 \end{cases}$$

où la fonction  $\Gamma$  est donnée par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

#### Preuve :

On considère les deux contours dessinés ci-dessous.



si  $p < 0$

On peut déformer le segment  $\left[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right]$  en une courbe formée de trois segments : (deuxième contour). Par périodicité, les intégrales sur chacun des côtés s'annulent, tandis que l'intégrale portant sur le segment  $-iR + \left[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right]$  tend vers 0 lorsque  $R$  tend vers l'infini. On a donc :

$$I_p(a) = 0 \quad \text{pour } p < 0$$

si  $p > 0$

Il faut considérer le premier contour. Les mêmes arguments de périodicité et de comportement asymptotique permettent d'écrire :

$$I_p(a) = \frac{i}{(2\pi)^{1/2}} \int_{+\infty}^0 \frac{\exp iph(a + i\lambda) d\lambda}{(1 - \exp ih[(a - a^-) - i\lambda])^{1/2}} \\ + \frac{i}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^{+\infty} \frac{\exp iph(a + i\lambda) d\lambda}{(1 - \exp ih[(a - a^+) - i\lambda])^{1/2}}$$

$$\text{soit } I_p(a) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \exp ipha \int_0^{+\infty} \frac{\exp -ph\lambda d\lambda}{\exp \frac{\lambda h}{2} (1 - \exp -\lambda h)^{1/2}}$$

ou encore (en posant  $\xi = \exp -\lambda h$ )

$$I_p(a) = \frac{\exp ipha}{h} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^1 (1 - \xi)^{-1/2} \xi^{p-1/2} d\xi$$

On reconnaît une fonction Beta (cf. Luke [Lu])

d'où :

$$I_p(a) = \frac{\exp ipha}{h} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} B\left(p + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

or :

$$B\left(p + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(p+1)} \quad \text{et} \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \pi^{1/2}$$

d'où le résultat.

Remarque :

On peut donner une forme plus explicite pour  $I_p(a)$  en utilisant :

$$\Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right) = \left(p - \frac{1}{2}\right) \dots 5 \cdot 3 \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Gamma(p + 1) = p \dots 4 \cdot 3 \cdot 2$$

Il reste :

$$I_p(a) = \frac{\exp ipha}{h} (2\pi)^{1/2} \frac{(2p-1)(2p-3) \dots 5 \cdot 3 \cdot 1}{2p(2p-2) \dots 6 \cdot 4 \cdot 2}$$

### Utilisation du théorème de convolution

Cette étape est destinée à justifier les expressions de  $S_{\epsilon h}^+$  et  $S_{\epsilon h}^-$  sous forme de convolution de deux fonctions discrètes. En fait, il s'agit là d'un résultat très classique qu'il convient néanmoins d'écrire soigneusement pour ne pas se tromper dans les constantes qui interviennent.

#### Proposition A2.2

$$\begin{aligned} \text{Si } a(ph) &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} A(k) \exp + iphk \, dk \\ \text{et } b(ph) &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} B(k) \exp + iphk \, dk \end{aligned}$$

alors on a :

$$\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} A(k) B(k) \exp + i p h k \, dk = \frac{h}{(2\pi)^{1/2}} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} a(qh) b(-qh + ph)$$

Preuve :

Inversons la première formule ; il vient :

$$A(k) = \frac{h}{(2\pi)^{1/2}} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} a(qh) \exp - i q h k$$

et donc :

$$\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} A(k) B(k) \exp i p h k \, dk = \frac{h}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} a(qh) B(k) \exp i(p - q) h k \, dk$$

Soit, en permutant le signe somme et le signe intégration :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} A(k) B(k) \exp i p h k \, dk \\ &= \frac{h}{(2\pi)^{1/2}} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} a(qh) \cdot \left\{ \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} B(k) \exp i(p - q) h k \, dk \right\} \\ &= \frac{h}{(2\pi)^{1/2}} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} b((p - q)h) \end{aligned}$$

En utilisant cette proposition lorsque :

$$A(k) = (1 - \exp ih[\varphi_h(0) - k])^{-1/2}$$

$$B(k) = (1 - \exp ih \left[ \varphi_h \left( \frac{\pi}{h} \right) - k \right])^{-1/2}$$

on obtient les résultats annoncés au début du paragraphe concernant  $S_{\varepsilon, h}^+$

En remarquant que l'on a :

$$S_{\varepsilon, h}^-(k) = \frac{1}{\gamma_{\varepsilon, h}^-(k)} = \frac{-i}{\gamma_{\varepsilon, h}^+(k)} = -i S_{\varepsilon, h}^+(-k)$$

On en déduit facilement la relation :

$$S_{\varepsilon, h}^-(ph) = S_{\varepsilon, h}^+(-ph)$$

et le résultat relatif à  $S_{\varepsilon, h}^-$  découle de celui établi pour  $S_{\varepsilon, h}^+$ .

### Nouvelle expression de $S_{\varepsilon, h}$

Comme nous l'avons dit, nous allons proposer un autre «découpage» des constantes intervenant dans les convolutions de manière à bien faire ressortir le rôle asymptotique de chacune d'elles.

Nous obtiendrons alors :

$$S_{\varepsilon, h}^+ = s_{\varepsilon, h}^+ * \delta_{\varepsilon, h}^+ = (2\pi)^{-1/2} c_h s_{\varepsilon, h}^{+0} * s_{\varepsilon, h}^{+\pi}$$

$$S_{\varepsilon, h}^- = s_{\varepsilon, h}^- * \delta_{\varepsilon, h}^- = -i(2\pi)^{-1/2} c_h s_{\varepsilon, h}^{-0} * s_{\varepsilon, h}^{-\pi}$$

avec :

$$s_{\epsilon,h}^+ \rightarrow F^{-1} \left[ \frac{1}{\gamma_{\epsilon}^+(k)} \right] = \begin{cases} (1+i) \frac{\exp i k_{\epsilon} x}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$s_{\epsilon,h}^- \rightarrow F^{-1} \left[ \frac{1}{\gamma_{\epsilon}^-(k)} \right] = \begin{cases} (+1-i) \frac{\exp -i k_{\epsilon} x}{\sqrt{-x}} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\delta_{\epsilon,h}^+ \text{ et } \delta_{\epsilon,h}^- \quad \delta(x_p)$$

Précisons ce dernier point ; on aura lorsque  $h \rightarrow 0$

$$\delta_{\epsilon,h}^{\pm}(x_p = ph) \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq 0 \text{ uniformément sur tout compact de } \mathbb{R}^* \\ \infty & \text{si } p = 0 \end{cases}$$

et :

$$\int \delta_{\epsilon,h}^{\pm}(x_p) dx_p = h \sum_p \delta_{\epsilon,h}^{\pm}(x_p = ph) \rightarrow 1$$

Pour cela, on utilise l'approximation (cf. Luke [Lu] , page 33) :

$$\frac{\Gamma\left(\frac{x_p}{h} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{x_p}{h} + 1\right)} \sim \frac{h^{1/2}}{x_p^{1/2}} \left(1 - \frac{h}{8x_p} + \dots\right)$$

ainsi que :

$$\varphi_{\epsilon,h}(0) \sim k_{\epsilon} (1 + O(h^2))$$

pour montrer que la fonction  $S_{\varepsilon, h}^+$  définie par :

$$s_{\varepsilon, h}^+(x_p = ph) = \begin{cases} \frac{1+i}{\sqrt{h}} \exp i \varphi_{\varepsilon, h}(0) \left(x_p + \frac{h}{4}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{x_p}{h} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{x_p}{h} + 1\right)} & \text{si } p \geq 0 \\ 0 & \text{si } p < 0 \end{cases}$$

convient ; on a alors :

$$\delta_{\varepsilon, h}^+(x_p = ph) = \begin{cases} \frac{1}{h} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \exp i \varphi_{\varepsilon, h}\left(\frac{\pi}{h}\right) \left(x_p + \frac{h}{4}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{x_p}{h} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{x_p}{h} + 1\right)} (4\lambda - 3)^{-1/4} \\ 0 & \text{si } p < 0 \end{cases}$$

en notant que :

$$\begin{cases} \lim_{h \rightarrow 0} \exp i h \varphi_{\varepsilon, h}\left(\frac{\pi}{h}\right) = \zeta \\ |\zeta| < 1 \end{cases}$$

on a bien  $\delta_{\varepsilon, h}^+(x_p) \rightarrow 0$  si  $x_p = ph \neq 0$

Il reste à vérifier que :

$$h \sum_{p=0}^{+\infty} \delta_{\varepsilon, h}^+(ph) \rightarrow 1 \quad (h \rightarrow 0)$$

Pour cela, on calcule :



$$\begin{aligned}
\lim_{h \rightarrow 0} h \sum_{p=0}^{+\infty} \delta_{\varepsilon, h}^+(ph) &= \zeta^{1/4} \left( \frac{2}{\pi} \right)^{1/2} (4\lambda - 3)^{-1/4} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(p+1)} \zeta^p \\
&= \zeta^{1/4} \left( \frac{2}{\pi} \right)^{1/2} (4\lambda - 3)^{-1/4} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(2p-1)(2p-3)\dots 3 \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2p(2p-2)\dots 2} \zeta^p \\
&= \zeta^{1/4} 2^{1/2} (4\lambda - 3)^{-1/4} (1 - \zeta)^{-1/2} = 1!!
\end{aligned}$$

La dernière égalité s'obtenant comme dans A1.C.3

## A.37

**ISSN 0249 - 6399**



**ISSN 0249 - 6399**